Sujet de stage M1 MF-MPA.
Année universitaire 2019/2020

Autour de l'équirépartition.

Encadrant : David Chiron
E-mail: david.chiron@univ-cotedazur.fr

Une suite (u_n) à valeurs dans $[0, 1]$ est dite équirépartie si pour tous $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on a $\sharp\{1 \leqslant k \leqslant n \text{ t.q. } u_k \in [a, b]\} \sim (b - a)n$. Cela correspond au fait que les valeurs de la suite (u_n) se répartissent de façon "aléatoire" uniforme sur $[0, 1]$. Le but de ce projet est d'étudier certains aspects de ces suites équiréparties, à savoir : des exemples et des contre-exemples; le critère de Bohl-Weyl faisant intervenir les monômes de Fourier $\mathrm{e}^{i2\pi nx}$; le théorème de Koksma affirmant que pour presque tout $x > 1$, la suite $(x^n - E(x^n))_n$ est équirépartie, ou encore un théorème de Weyl sur l'équirépartition de $(P(n) - E(P(n)))_n$ lorsque P est un polynôme. On verra également le phénomène sous l'angle du théorème ergodique de von Neumann sur les espaces de Hilbert.

On s'intéressera ensuite à la suite de van der Corput, et aux suites équiréparties en dimensions supérieures, en particulier les grandes dimensions. Le lien pourra être fait avec les méthodes de Monte-Carlo (mais avoir suivi le cours de Méthodes de Simulation Stochastique n'est pas obligatoire). Ces suites permettent l'approximation d'intégrales (en dimension 1 ou plus). On pourra envisager l'étude de la vitesse de convergence de ces méthodes. Des simulations numériques sont vivement souhaitées.

Les outils mis en jeu sont : séries de Fourier, fonctions intégrables, analyse à une variable.

References

[1] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988 & *Exercises in Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1993.

[2] A. Chambert-Loir, S. Fermiger, V. Maillot *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, tome 2*. Masson. 1997.

[3] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis. An Introduction,* (2003) Princeton University Press.

[4] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences.* Dover Publications Inc. (2006)