Année 2019-2020

GROUPES LIBRES ET PRESENTATIONS

Sujet proposé par J. Déserti

Un groupe G est dit libre sur une partie S de G si tout élément de G s'écrit de façon unique comme produit "réduit" d'éléments de S et de leurs inverses. Les morphismes de G dans un groupe H sont alors en bijection avec les applications de S dans H.

On s'intéressera au lemme du ping-pong, un résultat que l'on attribue à Félix Klein et qui permet de mettre en évidence de nombreux groupes libres.

On pourra étudier le théorème remarquable de Nielsen et Schreier ($\sim$ 1925) : tout sous-groupe d'un groupe libre est libre, peut-être de rang infini ; le rang des sous-groupes d'indice fini d est $d(r-1)+1$ donc supérieur à r si d, $n \geqslant 2$.

Dans un second temps la notion de groupe libre permet de présenter tout groupe engendré par une partie S comme groupe quotient du groupe libre sur S quotienté par certaines relations (R). Ainsi la donnée du couple $\langle S \,|\, R \rangle$ détermine entièrement la loi du groupe. Par exemple $\langle a \,|\, a^n = 1 \rangle$ est une présentation du groupe cyclique d'ordre n. Une telle présentation permet de décrire simplement tous les morphismes du groupe G dans un autre ; ceci est utile pour trouver les automorphismes, les représentations linéaires de G. On étudiera quelques exemples classiques de présentations (groupes diédraux, symétriques, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$).

Références

[**1**] Arnaudiès, Bertin, Groupes, Algèbre et géométrie, T. 1, IX.
[**2**] Calais, Éléments de théorie des groupes, IX.
[**3**] de la Harpe, Topics in Geometric Group Theory.
[**4**] Ramis, Warusfel, Moulin, Cours de mathématiques volume 1, Algèbre et géométrie, I. 4.