

# Idéaux de l'algèbre de Grassmann

Responsable du stage : **Patrick Cassam-Chenai**

**Laboratoire:** Laboratoire de mathématique J.-A. Dieudonné

**Equipe:** Interfaces des Mathématiques et Systèmes Complexes

**Coordonnées:** Bureau 2W601, Tél : +33 4 89 15 62 60, E-mail : cassam@unice.fr

## Présentation du sujet:

L'algèbre "extérieure" ou "de Grassmann" peut être introduite avec différentes motivations:

- pour faire correspondre à  $n$  vecteurs d'un espace vectoriel un nombre généralisant la notion de volume euclidien, (nul lorsqu'une relation de dépendance linéaire existe entre les vecteurs).
- pour généraliser les algèbres de polynômes au cas où les indéterminées anticommulent.
- pour décomposer les éléments d'une algèbre tensorielle en fonction de leur comportement sous l'action du groupe des permutations.

Concrètement, l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel  $H$  de dimension  $m$  est engendrée par le corps de base,  $\mathbb{K}$ , et les éléments de la forme,  $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_p$ , avec ( $0 < p \leq m$ ), et  $\forall i \phi_i \in H$ , appelés " $p$ -vecteurs décomposables", le produit "extérieur",  $\wedge$ , ayant la propriété suivante:

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_p = \varepsilon_\sigma \phi_{\sigma(1)} \wedge \phi_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \phi_{\sigma(p)},$$

pour toute permutation  $\sigma$  des indices  $\{1, 2, \dots, p\}$ , de signature  $\varepsilon_\sigma$ .

Les travaux anciens sur cette algèbre rédigés dans un style qui n'a plus cours aujourd'hui sont souvent tombés dans l'oubli. Or, ils peuvent s'avérer fort utiles pour la théorie quantique des systèmes fermioniques, comme les électrons d'un atome ou d'une molécule ou les nucléons d'un noyau, dont les fonctions d'ondes sont éléments de l'algèbre extérieure d'un espace de Hilbert (P. Cassam-Chenai, F. Patras, *Journal of Mathematical Physics*, **44**, p.4884-4906, 2003; *Physics Letters*, **A 326**, p. 297-306, 2004).

Le stage consistera à lire et traduire en langage moderne l'article suivant: "Sur certains idéaux de l'algèbre extérieure de degré  $2n$ ,  $n > 1$ ", de Th. H. LEPAGE, dans *XXIV. Algèbre et Théorie des Nombres* (A. Chatelet ed., CNRS, Paris, 1950), Chap. VI Algèbre extérieure, p.181-186. On réfléchira ensuite aux applications potentielles des résultats présentés à la physique quantique.