Proposition de sujet de projet en M1
Inégalité de Loomis-Whitney et théorie de l'information
Proposé par J.F.Collet
(Laboratoire Dieudonné)

Soient $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ trois ensembles quelconques, et E un sous-ensemble fini du produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$. Soit $E_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$ la projection de E sur $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, et définissons $E_{\mathcal{X}\mathcal{Z}}$ et $E_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}}$ de manière analogue. Enfin, pour tout ensemble fini A, on note $|A|$ son cardinal. La version la plus simple de l'inégalité dite de Loomis-Whitney, en dimension 3, est la suivante :

$$|E|^2 \leq |E_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}||E_{\mathcal{X}\mathcal{Z}}||E_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}}|. \tag{1}$$

On peut démontrer cette inégalité de manière élémentaire, par exemple (dans le cas continu où les cardinaux sont remplacés par des volumes) en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Une autre façon de procéder est de démontrer (1) à partir d'un résultat classique en probabilité, le lemme de Shearer. L'énoncé de ce résultat utilise la notion d'entropie, dont on rappele la définition : si p est une loi de probabilité sur un espace fini Ω, alors l'entropie de p est la quantité

$$H(p) := -\sum_{x \in \Omega} p(x) \ln p(x).$$

Le travail demandé consiste à examiner différentes démonstrations de (1), et en particulier celle qui utilise le lemme de Shearer ; le mémoire rédigé devra donc comporter une présentation de la notion d'entropie et d'entropie relative, et de diverses inégalités afférentes.

Une deuxième partie pourrait aborder le cas plus général où le produit cartésien est remplacé par une structure plus complexe (destinée en physique théorique à modéliser l'union de systèmes non indépendants) ; à ce sujet on pourra consulter le document suivant, pages 25 à 30 :

https ://www.ihes.fr/ gromov/wp-content/uploads/2018/08/probability-huge-Lecture-Nov-2014.pdf
(Attention toutefois à ne pas se laisser effrayer, le niveau de ce document est nettement supérieur à ce qu'on demande ici).

Mots-clés : *Entropie, entropie relative, inégalité isopérimétrique, et éventuellement catégories et foncteurs.*