

**Proposition de sujet de projet en M1 MPA :**  
**pseudo-distances et  $\Phi$ -entropies**  
Proposé par J.F.Collet

Le sujet consiste à étudier les propriétés de certaines quantités définies sur des espaces fonctionnels appropriés sur lesquels elles peuvent (en quelque sorte) être utilisées comme des distances, bien qu'au sens strict du terme il ne s'agisse pas de distance (en particulier ces quantités ne vérifient pas l'inégalité triangulaire). Le cas le plus simple est celui de la pseudo-distance dite de *Kullback-Leibler*  $D_{KL}$ , définie comme suit :

$$D_{KL}(u, v) := \sum_i u_i \ln \frac{u_i}{v_i}.$$

Ici  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs à composantes positives et vérifiant  $\sum_i u_i = \sum_i v_i = 1$ . La propriété clé de  $D_{KL}$  et qui justifie son utilité est la suivante : elle est toujours positive, et est nulle si et seulement si  $u = v$ .

Les  $\Phi$ -divergences sont des quantités qui généralisent  $D_{KL}$ , et sont basées sur l'utilisation de fonctions convexes. Le travail proposé contient deux parties : d'une part définition et propriétés de ces quantités, et d'autre part utilisation de celles-ci en théorie des chaînes de Markov ou/et des équations aux dérivées partielles paraboliques.

Les applications étant très nombreuses, la deuxième partie pourra suivant les intérêts des participants bifurquer soit vers des problèmes de classification en statistique, soit plutôt vers des questions d'analyse pure, ou même de géométrie riemannienne.

Mots-clés : *distance de Kullback-leibler, information de Shannon, fonctions convexes, inégalités de convexité, espaces fonctionnels, entropie, divergence de Bregman, matrices de Markov.*