SUJETS DE M2 AVEC INDIRA CHATTERJI

1. Le plafond de verre dans les réseaux sociaux

Le plafond de verre a été défini comme la *barrière invisible qui empêche les minorités et les femmes d'accéder aux échelons supérieurs de la hiérarchie, indépendamment de leurs qualifications et de leurs compétences*. La présence du plafond de verre est bien documentée au sein de plusieurs organisations. Dans le papier [Avi] , les auteurs définissent formellement l'effet plafond de verre dans les réseaux sociaux et l'étudient en proposant un modèle mathématique naturel, appelé *attachement préférentiel*, qui explique partiellement les causes du plafond de verre. Ce modèle consiste en un réseau avec deux types de sommets, représentant deux sous-populations, a reflètant trois types de phénomènes sociaux bien connus:

(1) Le mécanisme "on prête aux riches"
(2) Une partition initiale déséquilibrée
(3) Homophilie, ou préférence pour les gens qui nous ressemblent

Les auteurs prouvent que ce modèle a un fort effet plafond de verre et que ces trois conditions sont nécessaires, c'est à dire qu'en enlevant une de ces trois conditions, on ne verra plus l'effet plafond de verre ainsi défini.

Dans ce travail, l'étudiant lira le papier [Avi] et va expliciter certaines preuves dont la démonstration n'est que esquissée. Il s'agit de probabilités de base. Faire des simulations n'est pas requis mais serait intéressant.

Références

[Avi] C. Avin et al. Homophily and the glass ceiling effect in social networks . In : Proceedings of the 2015 Conference on Innovations in Theoretical Computer Science. ACM. 2015, p. 4150.

Contact: Indira Chatterji: indira@unice.fr

2. The glass ceiling effect in social networks

The glass ceiling effect has been defined as *the unseen barrier that keeps minorities and women from rising to the upper rungs of the corporate ladder, regardless of their qualifications or achievements.* It is well documented that many societies and organizations exhibit a glass ceiling. In the paper [Avi], the authors formally define and study the glass ceiling effect in social networks and propose a natural mathematical model, called the *biased preferential attachment model*, that partially explains the causes of the glass ceiling effect. This model consists of a network composed of two types of vertices, representing two sub-populations, and accommodates three well known social phenomena:

(1) The rich get richer mechanism
(2) A minority-majority partition
(3) Homophily.

The authors prove that this model exhibits a strong moment glass ceiling effect and that all three conditions are necessary, i.e., removing any one of them will prevent the appearance of a glass ceiling effect.

In this work, the student will be reading the paper [Avi] and try to write up some complete proofs for the ones that are only sketched. The mathematics involved are basic probability. Skills to run some simulations are not required but would be interesting.

Références

[Avi] C. Avin et al. Homophily and the glass ceiling effect in social networks . In : Proceedings of the 2015 Conference on Innovations in Theoretical Computer Science. ACM. 2015, p. 4150.

Contact: Indira Chatterji: indira@unice.fr

3. Les espaces médians

La solution de la conjecture de Hacken virtuelle en 2012 par Ian Agol a récemment été couronnée d'un prix de 3 milions de dollars. Des objects centraux dans cette solutions sont les complexes cubiques CAT(0), et ce sujet de mémoire se propose d'en étudier une généralisation, qui sont les espaces médians, et que l'ont peut définir très facilement comme suit.

Définition 1. Un espace métrique (X, d) est dit *médian* si, pour tous 3 points $x, y, z \in X$ il existe un unique point

$$t \in I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, x)$$

où $I(x, y)$ dénote l'*intervalle* entre les points x et y, soit

$$I(x, y) = \{t \in X | d(x, t) + d(t, y) = d(x, y)\}.$$

Les espaces médians sont des cas particuliers d'algèbres médianes, dont l'apparition remonte aux années 50. Ce sont des objets géométriques utiles pour étudier les actions de groupes. Une propriété cruciale des espaces médians est la suivante:

Proposition 1. *Pour toutes parties convexes A et B dans un espace médian, vérifiant $A \cap B = \emptyset$, il existe $H \subset X$ un convexe de complémentaire convexe tel que $A \subseteq H$ et $B \subseteq X \setminus H$.*

Dans ce travail de mémoire, on étudiera des exemples d'espaces médians, certaines propriétés, ainsi que la preuve de cette proposition, qui se trouve dans [Scho] mais qui a été reprise à plusieurs endroits.

Références

[Bow] Brian H. Bowditch, *Some properties of median metric spaces.* To appear in Groups Geom. Dyn. Abstract.

[CDH] I.Chatterji, C.Drutu, F.Haglund, *Kazhdan and Haagerup properties from the median viewpoint.* Adv. Math. 225 (2010) 882921.

[Scho] M.Sholander, *Medians and betweenness.* Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954) 801807.

Contact: Indira Chatterji: indira@unice.fr
English version next side

4. Median spaces

The solution of the virtual Haken conjecture in 2012 by Ian Agol was recently awarded a 3 milions de dollars prize. Central objects in this solutions are CAT(0) cubical complexes, and this subject proposes to study a generalization of those objects, called median spaces, and defined as follows.

Définition 2. A metric space (X, d) is called *median* if, for any 3 points $x, y, z \in X$ there is a unique point

$$t \in I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, x)$$

where $I(x, y)$ denotes the *interval* between the points x et y, that is

$$I(x, y) = \{t \in X | d(x, t) + d(t, y) = d(x, y)\}.$$

Median spaces are particular cases of median algebras, studied as early as the 50ies. Median spaces are geometric objects useful to study group actions. A crucial property of median spaces is the following:

Proposition 2. *For any convex subsets A and B un a median space and such that $A \cap B = \emptyset$, there exists $H \subset X$ a convex set whose complement is convex as well and such that $A \subseteq H$ and $B \subseteq X \setminus H$.*

In this work, the student will be looking at examples of median spaces, some of their properties, as well as the proof of the above proposition, that has been given first in [Scho] but that can be found at several other places.

Références

[Bow] Brian H. Bowditch, *Some properties of median metric spaces.* To appear in Groups Geom. Dyn. Abstract.

[CDH] I.Chatterji, C.Drutu, F.Haglund, *Kazhdan and Haagerup properties from the median viewpoint.* Adv. Math. 225 (2010) 882921.

[Scho] M.Sholander, *Medians and betweenness.* Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954) 801807.

Contact: Indira Chatterji: indira@unice.fr

5. Les groupes hyperboliques

Un groupe hyperbolique est un groupe de type fini (c'est à dire engendré par un nombre fini d'éléments et muni d'une métrique du mot vérifiant certaines propriétés caractéristiques de la géométrie hyperbolique. Cette notion a été introduite et développée par M. Gromov au début des années 1980. Il avait remarqué que beaucoup de résultats de Max Dehn concernant le groupe fondamental d'une surface de Riemann hyperbolique ne reposaient pas sur le fait qu'elle soit de dimension 2 ni même que ce soit une variété, mais restaient vrais dans un contexte beaucoup plus général. Dans l'article de 1987 [Gro] qui eut beaucoup de répercussions, Gromov proposa un vaste programme de recherche. Les idées et les ingrédients de base de la théorie viennent aussi du travail de George Mostow, William Thurston, James W. Cannon, Eliyahu Rips et bien d'autres.

Définition 3. Pour $G =< S >$ un groupe de type fini, on associe le *graphe de Cayley* $\Gamma(G, S)$, qui aura comme ensemble de sommets les éléments de G, et une arête entre deux sommets x et y si $x^{-1}y \in S$. La métrique obtenue en donnant longueur 1 à chaque arête définit une *métrique des mots* sur le groupe G. On dira que G est hyperbolique si les triangles du graphe de Cayley sont uniformément fins.

Une propriété intéressante des groupes hyperboliques est la suivante.

Proposition 3. *Soit G un groupe hyperbolique. Tout sous-groupe cyclique est quasi-isométriquement plongé dans G.*

Dans ce travail de mémoire, on étudiera des exemples de groupes hyperboliques, certaines définitions équivalentes et propriétés, ainsi que la preuve de cette proposition, qui se trouve dans [Gro] mais qui a été reprise à plusieurs endroits.

Références

[Gro] Mikhaïl Gromov, *Hyperbolic groups*, dans Essays in group theory, Springer, coll. MSRI Publ. 1987, p. 75-263.

[CDP] Michel Coornaert, Thomas Delzant et Athanase Papadopoulos, *Géométrie et théorie des groupes : les groupes hyperboliques de Gromov*, Lecture Notes in Mathematics, no 1441, Springer, 1990.

Contact: Indira Chatterji: indira@unice.fr

For an english version of this project, don't hesitate to e-mail me.

6. La propriété (T) de Kazhdan

Il est bien connu que $SL(n, \mathbf{Z})$, le groupe des matrices de déterminant 1 et à coefficients entiers, peut être engendré par un nombre fini d'élément (les matrices élémentaires): c'est ce qui se cache derrière la méthode du pivot de Gauss lorsqu'on calcule l'inverse d'une matrice inversible à coefficients entiers. Le groupe $SL(n, \mathbf{Z})$ est un sous-groupe du groupe $SL(n, \mathbf{R})$ des matrices de déterminant 1 à coefficients réels, et le quotient admet une mesure finie. Il y a beaucoup d'autres sous-groupes discrets de $SL(n, \mathbf{R})$, pour lesquels il est plus difficile de dire si ils sont de type fini. Un argument géométrique permet de voir que pour les sous-groupes discrets de $SL(n, \mathbf{R})$ dont le quotient est compact, c'est aussi le cas. Afin de traiter le cas général, Kazhdan en 1967 a introduit la propriété (T) et démontre que tous les sous-groupes discrets et à quotient de mesure finie de $SL(n, \mathbf{R})$ peuvent être engendrés par un nombre fini d'éléments. Depuis, la propriété (T) s'est avérée avoir de nombreuses conséquences dans divers sujets. Une caractérisation de la propriété (T) est la suivante.

Définition 4. Un groupe topologique G a *la propriété (T)* si toute action affine isométrique de G dans un espace de Hilbert a un point fixe.

Il est facile de voir qu'un groupe compact aura la propriété (T), et que cette cette propriété passe au quotient. Ainsi, une grande classe de groupes avec la propriété (T) est donnée par les résultat suivant.

Proposition 4.
(1) *Tout groupe discret satisfaisant la propriété (T) est de type fini.*
(2) *Le groupe topologique $SL(n, \mathbf{R})$ a la propriété (T) pour tout $n \geq 3$.*
(3) *La propriété (T) passe aux sous-groupes discrets de co-volume fini.*

Dans ce travail de mémoire, on étudiera quelques caractérisations de la propriété (T), ainsi que la preuve de cette proposition, qui se trouve dans [Kaz] mais qui a été reprise à plusieurs endroits.

Références

[Kaz] D. Kazhdan, *On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Functional analysis and its applications 1 p.63-65, (1967).

[BHV] B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette: *Kazhdan's property (T)* New Math. Monographs 11, Cambridge Univ. Press, (2008)

[HV] P. de la Harpe, A. Valette, *La proprit (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts* , Astérisque 175 (1989).

Contact: Indira Chatterji: indira@unice.fr

For an english version of this project, don't hesitate to e-mail me.