

UNE INTRODUCTION À LA SIMULATION NUMÉRIQUE DES EDP: MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES ET ÉLÉMENTS FINIS

VICTORITA DOLEAN

Le but de ce cours est de présenter une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique qui ont acquis une importance considérable au cours des dernières décennies dans tous les domaines de la science et des applications industrielles. Plus précisément, les objectifs de ce cours sont de présenter les principaux modèles (qui sont souvent des équations aux dérivées partielles ou EDP), leur classification et leur approximation aboutissant finalement à des simulations numériques utilisant un ordinateur. Ces modèles seront abordés dans un premier temps par la méthode des différences finies en mettant l'accent sur des notions telles que la consistance, la stabilité, la diffusion et dispersion numérique et la convergence. L'analyse théorique des schémas numériques sera présentée puis illustrée par des implémentations numériques sur des exemples bien choisis. Dans une deuxième partie on va se concentrer sur les méthodes numériques modernes en présentant d'abord quelques principes et résultats théoriques de l'approche variationnelle¹ pour les modèles stationnaires (indépendants du temps) elliptiques mettant les bases de la méthode des éléments finis², qui sera ensuite détaillée dans un cas uni-dimensionnel et si le temps le permet en dimension plus élevée. La méthode des éléments finis est à la base de nombreux logiciels industriels ou académiques. Pendant au moins une séance TP, on va illustrer l'utilisation du logiciel libre Freefem (<http://www.freefem.org>).

Le plan du cours est le suivant:

- Présentation de quelques modèles classiques d'EDP et de leur classification: équation de chaleur, équation des ondes, équation de Poisson, système de Lamé, système de Stokes.
- Principes généraux de la méthode des différences finies. Consistance et précision, stabilité et analyse de Fourier. Convergence: théorème de Lax.
- Différences finies pour l'équation de la chaleur: exemples de schémas. Application à d'autres modèles: équation d'advection, équation d'onde.
- Simulations numériques utilisant un langage de programmation approprié et convivial. (par exemple `Matlab`, `Python`, `Octave`)
- Formulation variationnelle pour des problèmes elliptiques. Théorème de Lax-Milgram. Application au problème de Laplace avec différents types de conditions aux limites.
- Principes généraux de la méthode des éléments finis: méthode de Galerkin.
- Éléments finis en une dimension d'espace: Lagrange P1, P2, analyse de convergence, propriétés.
- Introduction aux éléments finis en dimension $N \geq 2$ et à la simulation numérique à l'aide du logiciel `Freefem`.

Evaluation finale: projet de courte durée consistant à comprendre un papier de recherche accessible ou une question de recherche originale basée sur des méthodes numériques, leur analyse, suivie d'une implémentation numérique. Un court rapport sera requis ainsi qu'une présentation orale.

REFERENCES

- | |
|----|
| GA |
| MG |
- [1] Grégoire Allaire, *Numerical analysis and optimization*, Oxford University Press, 2007.
 - [2] Martin J. Gander and Felix Kwok, *Numerical Analysis of Partial Differential Equations using Maple and Matlab*, SIAM, 2019.

¹Cette présentation sera réduite au minimum nécessaire afin de rendre compréhensible la suite et n'a pas la prétention de se substituer à un cours d'EDP à part entière.

²La présentation de la méthode des éléments finis restera à un niveau assez élémentaire pour donner quelques bases à ceux désirant d'aller plus loin.