Master 1

Parcours MF (Mathématiques Fondamentales) & MPA (Mathématiques Pures et Applications)

Intitulés des UEs

Semestre 1
• Groupes et Géométrie (6 ECTS)
• Analyse Fonctionnelle et Espaces de Hilbert (6 ECTS)
• PPR Mathématiques Appliquées (6 ECTS)
  ECUE - Introduction aux E.D.P. (coeff. 3)
  ECUE - Compléments d'Analyse (coeff. 3)
⇝ option Probabilités et Statistiques
• PPR Numérique PS MPA-MF (6 ECTS)
  ECUE -Modélisation et Simulation Stochastique (coeff. 3)
  ECUE - Cours Langage orienté objet (coeff. 3)
• Processus Stochastiques
ou
⇝ option Calcul Scientifique
• PPR Numérique CS MPA-MF (6 ECTS)
  - ECUE Modélisation et Simulation Numérique (coeff. 3)
  - ECUE Cours Langage orienté objet (coeff. 3)
• E.D.P. et Différences Finies

Semestre 2
• Algèbre (6 ECTS)
• Géométrie et Topologie (6 ECTS)
• Analyse de Fourier et Distributions (6 ECTS)
• PPR Restitution de connaissances (6 ECTS)
  - ECUE Projet ou mémoire (coeff. 4)
  - ECUE Anglais (coeff. 2)
⇝ option Probabilités et Statistiques
• Statistique Mathématique (6 ECTS)
ou
⇝ option Calcul Scientifique
• Optimisation et Éléments Finis (6 ECTS)

Résumé des Cours

Semestre 1

1. Groupes et Géométrie

Volume – 2h de cours et 3h de Td par semaine : 6ECTS

1. Théorie des groupes
   — rappels.
   — exemples : actions de groupes, groupes libres, générateurs, groupes abéliens de type fini.
   — théorèmes de Sylow.
2. Géométrie affine et convexe
   — géométrie affine.
   — convexité.
   — polyèdres.
   — polytopes.
3. Représentations linéaires des groupes finis
   — représentations.
   — caractères, orthogonalité des caractères irréductibles, groupe dual.
   — Transformée de Fourier, convolution, théorème de Maschke.
   — table des caractères.

Références :
[1] Perrin, *Cours d'Algèbre*, Chapitre 1.
[2] Colmez, *Éléments d'Analyse et d'Algèbre*, Chapitre 1.
[3] P. Caldero et J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries. Tome premier.* Calvage et Mounet, 2013.
[4] P. Caldero et J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries. Tome 2.* Calvage et Mounet, 2015.
[5] P. Caldero et J. Germoni. *Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries.* Calvage et Mounet, 2017.
[6] G. Rauch. *Les groupes finis et leurs représentations.* Ellipses, 2001.

2. Analyse Fonctionnelle et Espaces de Hilbert

Volume – 2h de cours et 3h de Td par semaine : 6ECTS

1. Espaces complets
   — Complétude des espaces de fonctions usuels.
   — Théorème de prolongement d'applications à valeurs dans un complet.
   — Théorème de Banach-Steinhaus.
2. Espaces de Hilbert
   — Orthogonalité, Théorème de projection sur un convexe fermé.

— Bases hilbertiennes. Cas particulier des séries de Fourier.
— Théorème de représentation de Riesz.
— Théorème de Lax-Milgram.
— Opérateur sur un espace de Hilbert. Adjoint.

3. Compacité
   — Théorème de Riesz.
   — Théorème d'Ascoli.
   — Compacité faible de la boule dans les Hilbert.
   — Opérateur compact. Théorème de diagonalisation des opérateurs autoadjoints compacts.

Références :
[1] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle*, Dunod.
[2] F. Hirsch et G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle : cours et exercices avec réponses.* Dunod, 2009.

3. PPR – (6 ECTS) Mathématiques Appliquées

3.1. ECUE - Compléments d'Analyse. *Volume – 16h cours et 16h Td sur le semestre : coefficient 3*

1. Systèmes dynamiques
   — Existence de solutions, temps d'existence, solutions maximales, lemme de Grönwall, théorème des bouts. Comparaison de solutions.
   — Linéarisation, stabilité (variété stable/instable admise). Théorème de Lyapounov, fonction de Lyapounov.
2. Compléments d'analyse complexe
   — théorèmes d'holomorphie, application aux fonctions spéciales (ζ, Γ, etc).
   — Produits infinis (sin, ζ) et développements Eulériens.

Références :
[1] Berthelin, *Équations différentielles*, Cassini
[2] Hubbard et West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, chapitre 1, chapitre 6, chapitre 8.1 et 8.2
[3] Pabion *Éléments d'analyse complexe : licence de mathématiques.* Ellipses.
[4] Stein *Complex Analysis* Princeton Lectures in Analysis.
[5] Queffélec et Queffélec *Analyse Complexe et applications.* Calvage et Mounet. 2017

3.2. ECUE - Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles. *Volume – 16h cours et 16h Td sur le semestre : coefficient 3*

1. Équations Différentielles
   — Résolution de $u - u'' = f$ en 1d sur l'espace entier ou sur un domaine. Écriture convolutive.
   — Équation non linéaire : portrait de phase.
   — Méthode des caractéristiques pour les équations de transport. Équation de Burgers.
2. Détermination de solutions explicites : Laplacien radial, fonctions de Bessel, etc.
3. Notion de solution faible d'une équation

— Formulation faible des équations elliptiques (1d), avec diverses conditions au bord (Dirichlet, Neumann, périodique, Robin).
— Principe de Dirichlet. Minimisation de fonctionnelle.
— Le cadre H^1 (sans preuve) et résultats d'existence.
— Formulation en 2d, gradient, intégration par parties, normale.

4. Dérivation des E.D.P. (transport, chaleur...)

Références :
[1] L. Di Menza *Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles*. Cassini.
[2] T. Goudon *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique.* ISTE.

4. ECUE - Cours Langage orienté objet (dans l'UE (6 ECTS) PPR Numérique, coeff. 3)

Volume – 1h30 cours - 2h30 Tp par semaine

Ce cours est une initiation à la Programmation Orienté Objets vue à travers le langage C++ et le langage Python. Y seront abordés les éléments de syntaxe et les notions de programmation objet nécessaires à l'implémentation d'algorithmes en C++. Ce cours se veut avant tout pratique et pragmatique sur les notions abordées. L'objectif de ce cours est de fournir aux étudiants une initiation à la Programmation orientée objet ainsi qu'au C++.

Pour la partie C++, en suivant ce cours, un étudiant devra être capable de produire du code et d'écrire un programme informatique de bout en bout afin de résoudre un problème simple donné. Notions abordées :
— Le C++ d'un point de vue impératif, syntaxe élémentaire.
— Éléments de POO en C++ et implémentation.
— Utilisations pratiques en TP.

Concernant la partie Python du cours, on abordera :
— notions de base de Python
— utilisation des modules numpy, scipy, matplotlib.
— classes en Python.

Le cours sera illustré par des applications simples en TPs (représentation graphique, intégration numérique, etc).

Prérequis : Une connaissance préalable d'un langage de programmation impératif est un avantage. Néanmoins le cours reprendra ces notions et un étudiant n'ayant jamais programmé mais motivé pourra suivre ce module.

∼∼∼∼∼∼

Option Probabilités et Statistiques

∼∼∼∼∼∼∼

5. Processus Stochastiques

Volume – 2h cours et 3h Td par semaine : 6ECTS

L'objectif du cours est d'étudier l'aspect dynamique des modèles aléatoires, lorsque les systèmes considérés dépendent du temps en supplément du hasard. Pareille situation est très fréquente en physique, en biologie ou encore en économie. Ici, nous nous focaliserons sur deux exemples centraux de la théorie des processus stochastiques : les chaînes de Markov, analogue aléatoire des suites récursives déterministes, et les martingales, traduction mathématique de la notion de dynamique équitable en économie. Il s'agira d'introduire les concepts essentiels et d'en comprendre les propriétés essentielles : manipulations calculatoires d'un côté et comportements en temps long d'un autre.

1. Rappels (Variable aléatoire ; loi d'une variables aléatoire ; formule de transfert ; linéarité de l'espérance). Espaces vectoriels normés $\mathbb{L}^p$; inégalités usuelles (Jensen, Markov, Hölder, Cauchy-Schwarz).
2. Convergences stochastiques : p.s., en probabilité, en loi, en norme $\mathbb{L}^p$. Rappel des théorèmes de convergence monotone et dominée. Lien entre les convergences. Fonctions caractéristiques (calculs des lois usuelles). Caractérisation de la convergence en loi au moyen des fonctions caractéristiques et des fonctions de répartition.
3. Loi des grands Nombres et Théorème Limite Centrale.
4. Espérance conditionnelle (preuve de l'existence et unicité dans le cadre $\mathbb{L}^2$ avec interprétation géométrique). Propriétés. Formule de transfert conditionnelle.
5. Martingales :
   — (Sur-Sous)-Martingales bornées dans $\mathbb{L}^1$: théorème de convergence p.s. de Doob. (Sur-Sous)-Martingales bornées dans $\mathbb{L}^2$: théorème de convergence $\mathbb{L}^2$ de Doob.
   — Temps d'arrêt et théorème d'arrêt de Doob.
   — Inégalités de Doob.
   — Applications : Théorie de la ruine ; Urnes de Polya (utilisation en économie) ; Processus de Galton-Watson...
6. Chaînes de Markov sur un espace d'états dénombrable.
   — Classification des états (récurrence, transience).
   — Propriété de Markov faible et forte.
   — Distribution stationnaire : existence, unicité, calcul.
   — Théorème ergodique.
   — Applications : Modèles d'Ehrenfest ; Modèle de Wright-Fisher ; Google Page Rank...
7. Processus de Poisson.
   — Définition et principales propriétés.
   — Applications : paradoxe de l'autobus, files d'attente.

Le cours sera accompagné de la réalisation de mini-projets (par groupe de 3-4 étudiants) avec soutenance orale. Ces projets seront autant que faire se peut contextualiser dans le monde industriel ou socio-économique (pour les IM). Deux (?) séances de TPs utilisant le programme R seront réalisées.

6. ECUE - Modélisation et Simulation Stochastique (dans l'UE (6 ECTS) PPR Numérique, coeff. 3)

Volume – 16h cours et 16h Td sur le semestre

Les méthodes de Monte-Carlo ont pour but de calculer des quantités numériques en utilisant des suites aléatoires. Ces méthodes sont utilisées en statistiques, économie .... Elles sont un outil de base en mathématiques appliquées.

1. Rappels : Convergences de v.a., Loi des grands nombres ; Théorème Central Limite ; Intervalles de confiance.
2. Description des méthodes (comparaison avec les méthodes déterministes).
3. Simulation de variables aléatoires (méthode de rejet).
4. Réduction de variance.
5. Méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov.

Tout au long du cours, les notions apprises sur machine seront appliquées (langage utilisé : R).

∼∼∼∼∼∼

Option Calcul Scientifique

∼∼∼∼∼∼

7. Équations aux Dérivées Partielles et Différences Finies

Volume – 2h de cours et 3h de Td par semaine : 6 ECTS

On parcourra les trois classes de problèmes aux limites classiques en dimension un d'espace principalement : elliptique (équation de Poisson), parabolique (équation de la chaleur), hyperbolique (équation de transport linéaire). Pour chacune d'entre elles :

- on s'intéressera à leur résolution analytique formelle (séries de Fourier, séparation des variables) ou dans un cas régulier. Quand il y a lieu, on mettra en avant leurs caractéristiques classiques (principes du maximum, d'énergie ...).

- on donnera des schémas d'approximation numérique classiques de type différences finies dont on étudiera la stabilité, la consistance ainsi que la convergence.

Quand cela sera possible, on mettra en avant des propriétés de préservation au niveau discret des caractéristiques continues. La mise en oeuvre sur ordinateur au cours de séances de TP sera centrale.

1. Équation de Poisson en dimension 1 avec différentes conditions aux bords
   — Étude de l'existence et l'unicité de solutions, expression analytique dans des cas réguliers.
   — Discrétisation par différences finies : mise sous forme matricielle et propriétés de la matrice.
   — Preuve de convergence.
   — Généralisation au cas 2D (mise en œuvre).
2. Équation de la chaleur
   — Construction d'une solution par la recherche de solutions à variables séparées.
   — Schémas classiques d'approximation par différences finies (explicite centré, implicite centré, Crank-Nicolson). Preuves de convergence (notion de condition CFL).
   — Stabilité par techniques directes et au sens de Von Neumann.
3. Équation de transport linéaire (vitesse constante)
   — Résolution par méthode des caractéristiques

— Schémas classiques d'approximation par différences finies avec leurs propriétés de stabilité, consistance et convergence.
— Conditions aux bords artificielles, conditions périodiques.
— Stabilité par techniques directes et au sens de Von Neumann.

4. Si le temps le permet, équation des ondes ou équation de Burgers.

Références :

[1] D. Euvrard, *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur différences finies, éléments finis, méthode des singularités.* Masson.
[2] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation.* Éditions de l'École Polytechnique (2nde édition 2012)
[3] F. Filbet *Analyse numérique - Algorithme et étude mathématique.* (Dunod, 2e édition).

8. ECUE - Modélisation et Simulation Numérique (dans l'UE (6 ECTS) PPR Numérique, coeff. 3)

Volume – 16h cours et 16h Td sur le semestre

Le but de ce cours est de fournir des bases volontairement pratiques en modélisation et analyse numérique. L'enseignement comportera essentiellement une suite de cas pratiques et relativement génériques, inspirés par exemple de l'épreuve de Modélisation – Calcul Scientifique de l'Agrégation. Les thèmes abordés, provenant souvent d'exemples en mécanique, physique, biologie, économie, réseaux sociaux ... concerneront l'analyse numérique des EDO et des EDP, l'algèbre linéaire, les méthodes de tir, la recherche de valeurs propres, les systèmes algébriques, etc.

Références :

[1] T. Goudon *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique.* ISTE.

Semestre 2

9. Algèbre

Volume – 2h de cours et 3h de Td par semaine : 6 ECTS

1. Algèbre commutative
   — Anneaux, modules, idéaux, exemples de $\mathbb{Z}$ et de $A[X]$. Etudes d'exemples concrets de quotients de A[X].
   — Zoologie des anneaux (euclidien, principal, noetherien, factoriel) et idéaux (premiers et maximaux).
   — concepts de l'algèbre homologique : suites exactes, lemme des 5, chasse aux diagrammes.
   — Modules sur un anneau principal (ou euclidien).
   — Applications aux ensembles algébriques affines, résultant.
2. Théorie des corps
   — Corps finis, corps de fractions, corps algébriquement clos.
   — Extension de corps, corps de rupture et corps de décomposition, éléments algébriques et transcendants.
   — Extension de corps algébriques, théorie de Galois (si possible, dépend du niveau de L3).
   — Racines d'un polynôme, multiplicité. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.
   — structure des anneaux d'entiers et applications.

Références :

[1] Perrin, *Cours d'Algèbre*, Chapitre 2+3
[2] Guin, *Algèbre II*, Chapitre I à V
[3] Guin et Hausberger, *Algèbre I*, Deuxième partie

10. Géométrie et Topologie

Volume – 2h de cours et 3h de Td par semaine : 6 ECTS

1. Variétés différentiables
   — Théorème des difféomorphismes locaux, fonctions implicites, rang constant (tous sans preuve).
   — Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.
   — Champs de vecteurs et flot, 1-formes différentiables, fibré (co)tangent.
   — Crochet de Lie (extension culturelle : théorème de Frobenius).
   — En fonction du temps : courbure, en particulier pour les courbes paramétrées.
2. Groupe fondamental
   — Homotopie, définition du groupe fondamental.
   — Exemples : plan privé d'un ensemble fini, sphères, graphes, revêtement de SO(3) par SU(2).
   — Fonctorialité, groupe fondamental et revêtements.
   — Existence du revêtement universel (sans preuve).

Références :

[1] Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Chapitres 1 à 4.
[2] Berger et Gostiaux, *Géométrie différentielle*, Chapitres 1+2, Chapitre 8.
[3] Felix et Tanré, *Topologie algébrique*, Chapitre 1, éléments du Chapitre 4.
[4] Hatcher, *Algebraic Topology*, Chapter 1.1, Chapitres 1.3.

11. Analyse de Fourier et Distributions

Volume – 2h de cours et 3h de Td par semaine : 6 ECTS

1. Espaces L^p
   — Convolution dans les espaces L^p.
   — Résultats de densité.
2. Transformation de Fourier dans L^1 et dans L^2
   — Théorème d'inversion de Fourier.
   — Théorème de Fourier-Plancherel.
   — Calculs de transformées de Fourier à plusieurs variables.
3. Distributions
   — Distributions et distributions tempérées : définition, limites, dérivation (formule des sauts).
   — Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{S}'$
4. Solutions fondamentales d'opérateurs classiques (laplacien, chaleur, ondes)
5. L'espace H^1 et formulation faible
   — Propriétés de l'espace de Hilbert H^1 : complétude, caractérisations, densité.
   — Application aux problèmes elliptiques, formulation faible.

Références :

[1] M. El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels : niveau M1*. Ellipses
[2] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle*, Dunod.
[3] M. Briane et G. Pagès, *Analyse - Théorie de l'intégration - Convolution et transformée de Fourier* (7ème édition), De Boeck Supérieur. 2018.

∼∼∼∼∼∼
Option Probabilités et Statistiques
∼∼∼∼∼∼

12. Statistique Mathématique

Volume – 23h cours et 3h Td par semaine : 6 ECTS

Le but de ce cours est de poser les bases de la statistique mathématique.

1. Problématiques de la statistique mathématique et notion de modèle statistique. Exemples de modèle.
2. Notions d'estimateur et de risque en statistique. Normalité asymptotique d'un estimateur d'un paramètre réel. Construction d'intervalles de confiance. Utilisation des inégalités de Markov et Hoeffding. Utilisation du théorème central limite, de la méthode delta et du lemme de Slutsky. Utilisation de la méthode du pivot.
3. Introduction aux tests statistiques. Erreurs de première et seconde espèce, fonction puissance. Construction de tests à partir d'intervalles de confiance.
4. Les vecteurs gaussiens, le théorème de Cochran et ses applications dans le modèle linéaire gaussien.
5. La fonction de répartition et la fonction quantile. Statistique d'ordre.
6. Estimation et test dans les modèles non-paramétriques : utilisation de la mesure empirique. Estimation de la fonction de répartition et des quantiles. Bande de confiance et tests de Kolmokorov-Smirnov.

7. Estimation dans les modèles paramétriques. Estimateurs basés sur la méthode des moments. Estimateur du maximum de vraisemblance. Exemples et contre-exemples. Comparaison de procédures d'estimation. Introduction au paradigme bayésien et à l'estimation bayésienne.
8. Estimation dans les familles exponentielles à un paramètre.
9. Tests dans les modèles paramétriques. Test de Neyman-Pearson, test du rapport de vraisemblances. Test à rapports de vraisemblances monotones.
10. Tests du χ^2 : adéquation à une loi, à une famille de lois. Test du χ^2 d'indépendance.

Le cours sera accompagné de la réalisation de mini-projets (par groupe de 3-4 étudiants) avec soutenance orale. Ces projets seront autant que faire se peut contextualiser dans le monde industriel ou socio-économique (pour les IM). Deux (?) séances de TPS utilisant le programme R seront réalisées.

∼∼∼∼∼∼

Option Calcul Scientifique

∼∼∼∼∼∼

13. Optimisation et Éléments Finis

Volume – 2h de cours et 3h de Td par semaine : 6 ECTS

1. Optimisation

   On présentera les techniques de base pour l'optimisation en dimension finie : résultats d'existence, d'unicité, lien avec la convexité, équation et inéquation d'Euler, contraintes d'égalité et d'inégalité, multiplicateurs de Lagrange, théorème de Kuhn-Tucker. Les principaux algorithmes d'optimisation avec et sans contraintes seront donnés : gradient à pas optimal, gradient conjugué, méthode de Newton, pénalisation, recherche de point-selle d'un lagrangien. On mettra en pratique la plupart de ces algorithmes lors de séances de TP.
2. Éléments finis

   La deuxième partie du cours sera consacrée à la méthode des éléments finis. L'utilisation des résultats d'optimisation vus en première partie du cours permettra d'appréhender les principes variationnels sous-jacents. On se concentrera sur le problème de minimisation de l'énergie de Dirichlet. On donnera la formulation variationnelle associée (formellement ou dans le cas régulier) puis les principes de discrétisation des méthodes de Galerkin. On étudiera le problème de minimisation discret et la formulation variationnelle discrète qui en découle (mise sous forme matricielle, premières propriétés du système linéaire associé, estimation d'erreur préliminaire). On étudiera en particulier le cas des approximations nodales de Lagrange, en commençant par le cas P1 en 1D : construction et propriétés de la matrice, énoncé de l'erreur de convergence. On abordera ensuite la mise en oeuvre de l'approximation P2 en 1D et P1 en 2D. On s'appliquera à détailler l'implémentation pratique notamment lors des séances de TP.

Références :
[1] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation.* Éditions de l'École Polytechnique (2nde édition 2012)
[2] F. Filbet *Analyse numérique - Algorithme et étude mathématique.* (Dunod, 2e édition).