

Période Enjeux – Math0

Portail SITE

Année 2026-2027



UNIVERSITÉ
CÔTE D'AZUR 

Table des matières

1	Éléments de logique et théorie des ensembles	1
1.1	Ensembles	1
1.2	Applications	2
1.3	Logique	3
1.4	Exercices supplémentaires	5
2	Calculs dans l'ensemble des nombres réels	7
2.1	Fractions	7
2.2	Inégalités dans $\mathbb{R}$	7
2.3	Équations du premier et second degré dans $\mathbb{R}$	9
2.4	Exercices supplémentaires	11
3	Suites numériques	13
3.1	Suites	13
3.2	Raisonnement par récurrence	14
3.3	Symboles $\sum$, $\prod$ et factorielle	15
3.4	Somme d'une suite arithmétique et géométrique	16
4	Dénombrément	17
4.1	Trois formules classiques de dénombrement	17
4.2	Propriétés des coefficients binomiaux	19
4.3	Exercices supplémentaires	21
5	Géométrie dans le plan	23
5.1	Vecteurs du plan	23
5.2	Droites du plan	25
6	Fonctions usuelles	29
6.1	Fonctions réelles : premières définitions	29
6.2	Fonctions usuelles	29
6.3	Limites de fonctions	31
6.4	exercices supplémentaires	33
7	Études de fonctions	35
7.1	Continuité	35
7.2	Dérivabilité	35
7.3	Représentation graphique d'une fonction	37
8	Calcul intégral	39
8.1	Intégrale d'une fonction continue	39
8.2	Calcul de primitives et d'intégrales	39
8.3	Exercices supplémentaires.	41

Chapitre 1

Éléments de logique et théorie des ensembles

1.1 Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'objets, que l'on appelle les **éléments** de l'ensemble. Les ensembles se notent entre accolades, par exemple

$$A = \{1, 4, 8\}$$

est l'ensemble contenant 3 éléments : les nombres 1, 4 et 8. L'appartenance à un ensemble est notée $\in$.

Exemple 1.1. 1. L'ensemble des *entiers naturels* est

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

2. L'ensemble des *entiers relatifs* est

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

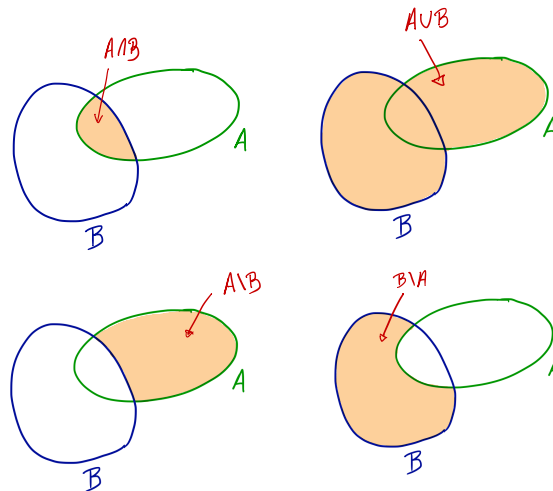
3. L'ensemble des *rationnels*, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des fractions de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs (avec $q \neq 0$).

4. L'ensemble des *réels* est noté $\mathbb{R}$.

5. L'*ensemble vide*, noté $\emptyset$, est l'ensemble ne contenant aucun élément.

Définition 1.2. Soit A et B deux ensembles.

1. On dit que A est **inclus** dans B si tout élément de A appartient à B (on dit aussi que A est un **sous-ensemble** de B). On notera $A \subset B$.
2. Le **complémentaire** d'un sous-ensemble A de B est l'ensemble A^c des éléments de B qui ne sont pas dans A .
3. L'**union** de A et B est l'ensemble $A \cup B$ des éléments appartenant à A ou à B .
4. L'**intersection** de A et B est l'ensemble $A \cap B$ des éléments appartenant à A et à B .
5. La **différence** de A par B est l'ensemble $A \setminus B$ des éléments qui appartiennent à A mais n'appartiennent pas à B .



Exercice 1.1. Décrire les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$ lorsque

1. $A = \{-1, 4, 8, 10, \pi\}$ et $B = \{4, 10, \pi, -1\}$.
2. $A = \{a, d, g, t, r, s\}$ et $B = \{r, d, u, w, g\}$.
3. $A = \mathbb{N}$ et $B = \mathbb{Z}$.
4. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{N}$.

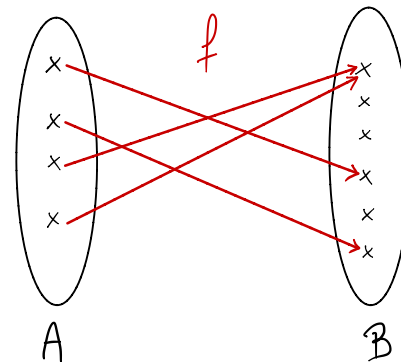
Proposition 1.3 (Loi de Morgan). Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Exercice 1.2. Soient A et B deux sous-ensemble d'un ensemble E . Vérifier que $A \setminus B = A \cap B^c$.

1.2 Applications

Une **application** f d'un ensemble A vers un ensemble B est une loi, notée $f : A \rightarrow B$ associant à tout élément $x \in A$ un unique élément $f(x) \in B$. Schématiquement, une telle application est représentée par



Exemple 1.4. 1. L'application qui associe à un étudiant de L1 sa taille est une application de l'ensemble des étudiants de L1 dans l'ensemble des nombres réels.

2. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à un nombre réel x le nombre réel $f(x) = x^2 - 7$.

Étant donné une application $f : A \rightarrow B$ et un élément $y \in B$, un **antécédent** de y par f est un élément $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Définition 1.5. Soit $f : A \rightarrow B$ une application.

1. f est dite **injective** si tout élément de B possède au plus un antécédent.
2. f est dite **surjective** si tout élément de B possède au moins un antécédent.
3. f est dite **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective.

Exercice 1.3. Dans les cas suivants, dire si la fonction f est injective, surjective, ou bijective :

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 4$.
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$.

1.3 Logique

Une **assertion** est une phrase, mathématique ou non, dont on peut dire sans ambiguïté si elle est vraie (1) ou fausse (0). Pour écrire les assertions mathématiques, nous utiliserons souvent les notations suivantes (aussi appelées *quantificateurs*) :

$\forall$: pour tout $\exists$: il existe $\nexists$: il n'existe pas $\exists!$: il existe un unique.

Exemple 1.6. 1. Aujourd'hui il pleut.

2. Au moins un étudiant de la classe a plus de 18 ans.
3. Tous les étudiants de L1 aiment les mathématiques.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$.
5. $\forall x \in \mathbb{N}, -x \in \mathbb{N}$.
6. $\forall x \in \mathbb{Q} \exists y \in \mathbb{N}$ tel que $y > x$.
7. $\exists y \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{Q}$ on a $y > x$.

Définition 1.7. La **négation** d'une assertion A est l'assertion $\overline{A}$ qui est vraie lorsque A est fausse, et fausse lorsque A est vraie.

Il est très pratique de représenter les relations entre différentes assertions via leurs **tables de vérité**. Par exemple :

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Exercice 1.4. Donner les négations des assertions de l'exemple 1.6.

Exercice 1.5. Dans les cas suivants, dire si l'assertion est vraie ou fausse, et donner sa négation :

1. $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $x + y = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{Q} \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $xy = 1$.
3. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists x \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $x < \epsilon$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \exists x \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $x < \epsilon$.

Définition 1.8. Soit A et B deux assertions.

1. **A et B** est l'assertion notée $A \wedge B$, qui est vraie si et seulement si A est vraie et B est vraie.
2. **A ou B** est l'assertion notée $A \vee B$, qui est vraie si et seulement si A est vraie ou B est vraie.
3. **A implique B** est l'assertion notée $A \Rightarrow B$ qui est vraie si et seulement si A est fausse, ou A et B sont simultanément vraies.
4. **A est équivalente à B** est l'assertion notée $A \Leftrightarrow B$, qui est vraie si et seulement si A et B sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

Voici les tables de vérités :

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Exercice 1.6. Vérifier que $A \Rightarrow B$ est la même assertion que $\overline{A} \vee B$.

Remarque 1.9. Il peut sembler bizarre qu'une assertion fausse puisse impliquer une assertion vraie. Ce qu'il faut retenir est que la seule possibilité pour que l'implication $A \Rightarrow B$ soit fausse est lorsque A est vraie et B est fausse : **"le vrai n'implique pas le faux"**.

Exercice 1.7. Dans les cas suivants, dire si l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie :

1. $x \in \mathbb{N} \Rightarrow (x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0)$.
2. $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0)$.
3. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = y^2$.

Proposition 1.10 (Loi de Morgan). Soit A et B deux assertions.

1. $\overline{(A \vee B)} = \overline{A} \wedge \overline{B}$.
2. $\overline{(A \wedge B)} = \overline{A} \vee \overline{B}$.

Définition 1.11. Soit A et B deux assertions.

1. La **contraposée** de $A \Rightarrow B$ est $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.
2. La **réciproque** de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$.

Proposition 1.12. Une implication est équivalente à sa contraposée.

Ceci peut se concevoir dans des exemples de la vie courante. Prenons l'exemple d'un individu très précautionneux : dès qu'il pleut, il prend son parapluie. Logiquement, on le résume à « Pluie $\Rightarrow$ Parapluie ». Si on croise cet individu et qu'il est sans son parapluie, alors c'est qu'il ne pleut pas : $\overline{\text{Parapluie}} \Rightarrow \overline{\text{Pluie}}$.

Par contre, il est possible qu'il ait pris son parapluie sans qu'il pleuve, mettons par anticipation. Donc, ce n'est pas parce que « Pluie $\Rightarrow$ Parapluie » est vraie que « Parapluie $\Rightarrow$ Pluie » est vraie.

Exercice 1.8. Décrire les contraposées et les réciproques des implications de l'exercice 1.7 et dire si elles sont vraies ou fausses.

1.4 Exercices supplémentaires

Exercice 1.9. Soit A et B deux ensembles. Montrer l'égalité

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Exercice 1.10. Soit A et B deux assertions. Montrer les équivalences suivantes

1. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
2. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \vee \overline{A})$.
3. $\overline{(A \Rightarrow B)} \Leftrightarrow (\overline{B} \wedge A)$.

Exercice 1.11. Démontrer la Proposition 1.3 et la Proposition 1.12.

Exercice 1.12. Soit A, B, C trois ensembles, $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux applications. On définit $g \circ f : A \rightarrow C$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Montrer que

1. $(g \circ f)$ injective $\Rightarrow f$ injective.
2. $(g \circ f)$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Chapitre 2

Calculs dans l'ensemble des nombres réels

2.1 Fractions

Exercice 2.1. Calculer et écrire sous forme irréductible :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{7} - \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{\frac{5}{6}}, \quad \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}, \quad \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}},$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3}, \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}, \quad \frac{10}{x} - \frac{7}{2x}, \quad \frac{1+x}{2-x} + \frac{5}{2-x}, \quad \frac{1+x}{2-x} + \frac{1}{1-x}.$$

2.2 Inégalités dans $\mathbb{R}$

2.2.1 Intervalles

Définition 2.1. On appelle intervalle fermé de $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de l'une des formes suivantes.

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad [a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \quad] - \infty; a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad \mathbb{R} \text{ ou } \emptyset,$$

où $a < b$ sont des nombres réels. On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de l'une des formes suivantes.

$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \quad] - \infty; a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad \mathbb{R} \text{ ou } \emptyset,$$

où $a < b$ sont des nombres réels. Enfin, on appelle intervalle de $\mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ouvert, un intervalle fermé ou un ensemble de l'une des formes suivantes

$$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

où $a < b$ sont des nombres réels.

Exercice 2.2. Écrire sous forme d'intervalle (ou de réunion d'intervalles) les sous ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

1. $A = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq \sqrt{2}\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R}, 2 \leq x < 5 \text{ et } 6 \leq x < 7\}$
3. $C =] - 5, \pi] \cap [2, 18[$
4. $D = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 4\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 9\}$

2.2.2 Règles de calcul sur les inégalités

1. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$,
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall k > 0$, si $a < b$, alors $ka < kb$,
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall k < 0$, si $a < b$, alors $ka > kb$,
4. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $0 \leq a < b$ et $0 \leq c < d$, alors $0 \leq ac < bd$,
5. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $a < b \leq 0$ et $c < d \leq 0$, alors $0 \leq bd < ac$.
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$).
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$).

Exercice 2.3. Dans chacun des cas suivants, déterminer **sans calculatrice** lequel des deux nombres proposés est le plus grand.

- | | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|---|
| 1. $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{3}$. | 3. $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. | 6. $\sqrt{2}$ et $\frac{3}{2}$. | 8. $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$ et 3. |
| 2. $\frac{7}{12}$ et $\frac{5}{7}$. | 4. $\sqrt{3}$ et 2. | 7. $\sqrt{5}$ et $\frac{7}{3}$. | 9. $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$ et $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$. |
| 5. $2 + \sqrt{3}$ et 4. | | | |

Exercice 2.4. Encadrer :

- | | |
|---|---|
| 1. $\frac{x+1}{2x+3}$ pour $x \in [0, 2]$. | 5. $\frac{x+2}{x-10}$ pour $x \in [3, 5]$ |
| 2. $\sqrt{2x+1}$ pour $x \in [1, 2]$ | 6. $x^2 - 8x - 20$ pour $x \in [3, 5]$. |
| 3. $\frac{1}{4x+5}$ pour $x \in [-1, 5]$ | 7. $(5x+3)^2$ pour $x \in [0, 2]$ puis pour $x \in [-1, 1]$ |
| 4. $(x+2)(x-10)$ pour $x \in [3, 5]$ | |

2.2.3 La valeur absolue

Sur $\mathbb{R}$, on appelle valeur absolue l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ainsi, si a et b sont deux nombres réels, $|a - b|$ représente la distance entre a et b sur l'axe réel.

2.2.4 Majorants et minorants

Définition 2.2. Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dira que E est **majoré** (respectivement **minoré**) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que pour tout $x \in E$ on ait $x \leq M$ (resp. $x \geq m$).

Un élément M vérifiant la propriété ci dessus s'appelle un majorant de E (resp. m s'appelle un minorant de E).

Un ensemble qui est à la fois majoré et minoré est dit **borné**.

Exemple 2.3. L'intervalle $A =]-\infty, 1[$ est majoré, mais il n'est pas minoré. Les nombres 5, π , 2, 1 sont des majorants de A . Il en existe une infinité d'autres. L'ensemble A ne possède aucun minorant.

Définition 2.4. Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dira que E possède un maximum s'il existe $M \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \leq M$. On dira que E possède un minimum s'il existe $m \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \geq m$.

ATTENTION : La différence fondamentale entre cette définition et la précédente porte sur le fait que le majorant M appartient ou pas à l'ensemble E . Par exemple, l'ensemble $A = [0, 1]$ possède un maximum et un minimum : $\max(A) = 1$ et $\min(A) = 0$. Par contre, l'ensemble $B = [0, 1[$ n'a pas de maximum (bien qu'il soit borné).

Exercice 2.5. Parmi les ensembles suivant, dire lesquels possèdent un majorant, un minorant, un maximum ou un minimum.

1. $A = \left\{ \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.
2. $B =]-1; 12]$
3. $C = \mathbb{Q} \cap [\pi, 17/3]$.

2.3 Équations du premier et second degré dans $\mathbb{R}$

2.3.1 Premier degré

Exercice 2.6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x + 1 = 3x + 5$.
2. $2x + 4 = 2x + 5$.
3. $12x - 3 = 7$.

2.3.2 Identités remarquables

Développer une expression, c'est l'écrire sous forme d'une somme. **Factoriser** une expression, c'est l'écrire sous forme d'un produit.

Pour développer ou factoriser une expression, on utilise les formules suivantes.

Proposition 2.5. Soient k , a et b des nombres réels. On a les égalités suivantes.

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $k(a + b) = (a + b)k = ka + kb$. | 3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. |
| 2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. | 4. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. |

Exemple 2.6. Pour développer l'expression $(2x + 3)(x - 1)$, on utilise la première règle ci-dessus :

$$(2x + 3)(x - 1) = (2x + 3)x + (2x + 3)(-1) = 2x^2 + 3x - 2x - 3 = 2x^2 + x - 3.$$

Pour développer l'expression $(2x + 3)^2$, on peut utiliser la deuxième formule ci-dessus

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9.$$

Exercice 2.7. Développer les expressions suivantes, où a , b , x et y désignent des nombres réels.

- | | | |
|-------------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1. $5(x + 2)$ | 4. $(10x + 1)^2$ | 7. $(y - 1)(x + 1)^2$ |
| 2. $\frac{b}{3}(x + 3)$ | 5. $\frac{1}{5}(5y - 3)^2$ | 8. $(a + b)^3$ |
| 3. $(y + 3)(x + 1)$ | 6. $(y - 1)(x + 1)(x - 1)$ | |

Exemple 2.7. On va utiliser les mêmes formules (dans l'autre sens) pour factoriser des expressions. Par exemple, pour factoriser l'expression $10x^2 - 10$, on utilise, la première puis la dernière règle : $10x^2 - 10 = 10(x^2 - 1) = 10(x^2 - 1^2) = 10(x - 1)(x + 1)$.

Exercice 2.8. Factoriser les expressions suivantes en utilisant les formules de la proposition 2.5.

1. $x^2 + 2x$

3. $x^2 - 2x + 1$

5. $xy^2 - 4x$

2. $x^2 - 4$

4. $\frac{1}{25}x^2 - \frac{1}{9}$

6. $10x^2 + 20x + 10$

2.3.3 Forme canonique d'un polynôme de degré 2

On appelle polynôme (réel) de degré 2 toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$, où a est un nombre réel non-nul et b et c sont des nombres réels. Écrire un tel polynôme sous forme canonique, c'est trouver des nombres réels λ , α et β de sorte que

$$ax^2 + bx + c = \lambda((x - \alpha)^2 - \beta).$$

Dans le cas où $\beta \geq 0$, la forme canonique permet de factoriser le polynôme. En effet, si $\beta \geq 0$,

$$\lambda((x - \alpha)^2 - \beta) = \lambda((x - \alpha)^2 - (\sqrt{\beta})^2) = \lambda(x - \alpha + \sqrt{\beta})(x - \alpha - \sqrt{\beta}).$$

Exemple 2.8. Mettons le polynôme $-3x^2 + 6x + 3$ sous forme canonique. On commence par factoriser par le coefficient dominant -3 :

$$-3x^2 + 6x + 3 = -3(x^2 - 2x - 1).$$

Ensuite on interprète le terme $-2x$ comme le double produit d'une identité remarquable que l'on fait apparaître (en ajoutant et en enlevant 1^2 dans l'exemple).

$$\begin{aligned} -3(x^2 - 2x - 1) &= -3(x^2 - 2.1.x + 1^2 - 1^2 - 1) \\ &= -3(x^2 - 2.1.x + 1^2 - 2) \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ pour obtenir la forme canonique du polynôme.

$$-3(x^2 - 2.1.x + 1^2 - 2) = -3((x - 1)^2 - 2).$$

Enfin, on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ pour factoriser le polynôme

$$\begin{aligned} -3((x - 1)^2 - 2) &= -3((x - 1)^2 - (\sqrt{2})^2) \\ &= -3(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Au final, on obtient une factorisation du polynôme

$$-3x^2 + 6x + 3 = -3(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}).$$

Exemple 2.9. Avec la même méthode, nous allons mettre le polynôme $x^2 + 4x + 6$ sous forme canonique.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 6 &= x^2 + 2.2.x + 2^2 - 2^2 + 6 \\ &= x^2 + 2.2.x + 2^2 + 2 \\ &= (x + 2)^2 + 2. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on n'obtient pas une différence entre deux carrés de réels. On ne peut pas factoriser comme dans le premier exemple.

Exercice 2.9. Écrire sous forme canonique les polynômes de degré 2 suivants. Si possible, factoriser ces polynômes.

1. $x^2 + 6x - 16$

3. $x^2 - 8x + 16$

5. $10x^2 + 10x + 10$

2. $x^2 - 2x + 2$

4. $5x^2 - 30x + 45$

6. $2x^2 + 9x + 4$

2.3.4 Équations du second degré

La méthode générale pour résoudre une équation algébrique du second degré est de la réécrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, puis de mettre $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique. Ensuite, si l'on peut factoriser $ax^2 + bx + c$, on peut utiliser la propriété suivante pour se ramener à des équations de degré 1.

Proposition 2.10. *Un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.*

Exemple 2.11. *On veut résoudre l'équation $-2x^2 + 3x + 6 = x^2 - 3x + 3$. En regroupant tout dans le membre de gauche, c'est-à-dire en enlevant $x^2 - 3x + 3$ aux deux membres de l'équation, l'équation se réécrit*

$$-3x^2 + 6x + 3 = 0.$$

En utilisant la factorisation du membre de gauche vue dans l'exemple 2.8, l'équation se réécrit

$$-3(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) = 0.$$

Enfin, d'après la proposition 2.10, cette équation est vérifiée si et seulement si

$$x - 1 - \sqrt{2} = 0 \text{ ou } x - 1 + \sqrt{2} = 0$$

c'est-à-dire

$$x = 1 + \sqrt{2} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}.$$

Exemple 2.12. *Ici, on veut résoudre l'équation $x^2 + 4x + 6 = 0$. En utilisant la forme canonique obtenue dans l'exemple 2.9, l'équation se réécrit*

$$(x + 2)^2 + 2 = 0.$$

Mais, pour tout nombre réel x , le nombre réel $(x + 2)^2$ est positif car c'est un carré. Ainsi, le nombre $(x + 2)^2 + 2$ est strictement positif donc l'équation n'a pas de solution.

Exercice 2.10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- | | |
|---------------------------|----------------------------------|
| 1. $(x - 1)(x + 3) = 0$. | 4. $x^2 + 4x + 1 = -1$. |
| 2. $3x^2 + 6x + 9 = 0$. | 5. $2x^2 + 12x + 20 = 0$. |
| 3. $x^2 - 2x = 4$. | 6. $(x - 1)(x^2 + 2x + 1) = 0$. |

2.4 Exercices supplémentaires

Exercice 2.11. Soit x, y tels que $-4 < x < -2$ et $8 < y < 10$. Donnez un encadrement de $x - y$, xy et de $-\sqrt{x^2}$.

Exercice 2.12. Vrai ou faux?

1. Pour que $x^2 > 10000$, il suffit que $x > 100$.
2. Pour que $x^2 > 10000$, il faut que $x > 100$.
3. Pour que $x > 100$, il suffit que $x^2 > 10000$.
4. Pour que $x > 100$, il faut que $x^2 > 10000$.
5. Pour que $\frac{1}{x} > 100$, il suffit que $x < 10^{-2}$.

6. Pour que $5x^2 + \frac{10}{x} > 100$, il suffit que $x < -5$.
7. Pour que $5x^2 + \frac{10}{x} > 100$, il faut que $x < -5$.
8. Soient a et b deux réels. Pour que $a + b < 1$, il faut que $a < \frac{1}{2}$ et $b < \frac{1}{2}$.
9. L'ensemble des réels x tels que $\frac{1}{x} < 1$ est l'intervalle $]1, +\infty[$.
10. Pour tout entier naturel n , l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x} > 10^n$ est l'intervalle $]10^{2n}, +\infty[$.

Exercice 2.13. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $|x - 2| \leq 3$
2. $|3 - x| \leq 4$
3. $|x - 1| \leq -\sqrt{2}$
4. $|x - 5| + |x + 1| < 8$

Exercice 2.14. Dans chacun des cas suivants, dites si l'ensemble considéré est majoré, minoré. Déterminez si l'ensemble possède un maximum, un minimum.

$$E_1 =]0, 1], E_2 = \mathbb{N}, E_3 = [0, +\infty[, E_4 = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}.$$

Exercice 2.15. Montrer que $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ et que $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$. En déduire une formule analogue pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 2.16. Soient $a \neq 0$, b et c des nombres réels. Mettre le polynôme $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique. En déduire l'ensemble des solutions réelles de l'équation, d'inconnue x , $ax^2 + bx + c = 0$ et retrouver les formules vues dans le secondaire.

Exercice 2.17. Déterminer dans chacun des cas suivants l'ensemble des nombres réels x qui vérifient la relation proposée.

1. $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.
2. $x^4 + 10x^2 + 16 = 0$.
3. $x^4 + 4x^2 - 5 \geq 0$.
4. $x^4 + 10x^2 + 16 < 0$.
5. $(x^2 + 4x - 3)(x^2 + 5x + 19) = 0$.

Exercice 2.18. 1. Déterminer deux réels a et b tels que $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + ax + b)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 = 1$.
3. Déterminer deux réels a et b tels que $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x^2 + ax + b)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 2x^2 - 5x = 6$.

Chapitre 3

Suites numériques

3.1 Suites

Une **suite numérique** est une application

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & x_n \end{array} .$$

Nous noterons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une telle suite.

Définition 3.1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

1. **arithmétique** si il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = x_n + r .$$

2. **Géométrique** si il existe un réel r non nul tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = rx_n .$$

Dans les deux cas, le réel r est appelé la **raison** de la suite.

Exemple 3.2. 1. L'ouverture d'une ligne internet coûte 50€, puis l'abonnement est de 20€ par mois. Si l'on note x_n le prix total payé (en euros) après n mois d'abonnement, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 20.

2. Le prix d'une baguette de pain augmente de 5% par an. Si l'on note y_n le prix d'une baguette l'année n , alors la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 1,05.

Proposition 3.3. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique et $n_0 \in \mathbb{N}$ un entier fixé.

1. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r , alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$x_{n_0+k} = x_{n_0} + kr .$$

2. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q , alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$x_{n_0+k} = q^k x_{n_0} .$$

Exercice 3.1. Considérons les données de l'Exemple 3.2.

Au bout de combien de mois aura-t-on payé 1000€ pour internet ?

Sachant qu'en 2010 une baguette coûtait 1€, en quelle année la baguette coûtera 2€ ? 5€ ?

3.2 Raisonnement par récurrence

Le but du raisonnement par récurrence est de démontrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$, est vraie pour tout $n \geq n_0$ pour un certains $n_0 \in \mathbb{N}$.

On procède en deux étapes :

1. **Initialisation** : on démontre que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** : On suppose que $P(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et on montre que cela implique que $P(k+1)$ est vraie.

Cela suffit à démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. En effet, comme la propriété $P(n_0)$ est vraie, alors la propriété $P(n_0+1)$ est vraie par hérédité. Mais cette même propriété d'hérédité implique alors que la propriété $P(n_0+2)$ est vraie, donc la propriété $P(n_0+3)$ aussi et ainsi de suite. Ainsi, on obtient de proche en proche que, pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

On utilise souvent l'image suivante pour illustrer la récurrence. Imaginons une ligne infinie de dominos mis debout. L'initialisation est l'analogie de l'évènement "le premier domino de la ligne tombe" et l'hérédité est le principe "si un domino tombe, alors le suivant tombe aussi". Si ces deux principes sont vérifiés, on peut être sûr que tous les dominos de la ligne vont tomber.

Exemple 3.4. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, nous allons montrer par récurrence la propriété $P(n)$ suivante :

$$P(n) : 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $0 = \frac{0(0+1)}{2}$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété $P(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Le but est de montrer $P(n+1)$.

Par hypothèse, nous avons

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rajoutons $n+1$ aux deux membres de cette égalité. Nous obtenons alors

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie dès que $P(n)$ est vraie.

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, et comme $P(0)$ est vraie, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il faut faire très attention avec les raisonnement par récurrence, car il est possible de "démontrer" n'importe quoi ! Regardons le cas suivant :

Théorème 3.5 (Les triangles n'existent pas !). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout ensemble de n points distincts dans le plan, les n points sont sur un même droite. En particulier, les triangles n'existent pas !

Démonstration. Nous travaillons par récurrence.

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, ou même $n = 2$, le résultat est clairement vrai.

- **Hérédité** : Supposons le résultat vrai pour un certain $n > 0$ et montrons le pour $(n+1)$. Nous considérons donc $(n+1)$ -points distincts $A_1, \dots, A_{n+1}$ dans le plan.

Par hypothèse de récurrence, les n premiers points $A_1, \dots, A_n$ sont sur une droite $\mathcal{D}$. De même, les n derniers points $A_2, \dots, A_{n+1}$ sont sur une droite $\mathcal{D}'$.

Maintenant, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ passent par les 2 points distincts A_2 et A_n , et donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$. Ce qui conclut le résultat. $\square$

Où est l'arnaque ?

3.3 Symboles $\sum$, $\prod$ et factorielle

Notons $n_0 \leq n_1$ des entiers relatifs et $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_1}$ des nombres réels. On note

$$\sum_{i=n_0}^{n_1} x_i = x_{n_0} + x_{n_0+1} + \dots + x_{n_1}.$$

Par exemple, $\sum_{i=0}^3 i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$.

Noter que le i qui apparaît dans la formule ci-dessus est une variable muette : on aurait pu la remplacer par n'importe quelle autre lettre. Par exemple

$$\sum_{k=0}^3 k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = \sum_{i=0}^3 i^2.$$

Par convention, une somme vide est égale à 0. Par exemple $\sum_{k=0}^{-1} k = 0$, puisqu'il n'y a pas d'indice k plus grand que 0 et plus petit que -1 .

Exercice 3.2. (i) Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=1}^4 i, \quad S_2 = \sum_{k=1}^3 k, \quad S_3 = \sum_{k=1}^{10} 1, \quad S_4 = \sum_{i=1}^n 3, \quad S_5 = \sum_{i=-2}^3 (i+2), \quad S_6 = \sum_{i=0}^3 (i+1)^2.$$

(ii) Ecrire les additions suivantes en utilisant le symbole $\sum$ (sans les calculer) :

$$S = 100 + 101 + 102 + \dots + 199 + 200, \quad T = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{55} + \frac{1}{60}$$

$$R = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 38 + 40, \quad U = 3 + 9 + 15 + 21 + \dots + 39 + 45$$

(iii) Voici une table de données statistiques :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	-1	5	2	-2	5	2	1	3	4

Calculer :

$$T_1 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2, \quad T_2 = \sum_{i=1}^{10} i x_i, \quad T_3 = \sum_{i=1}^5 2 x_{2i}.$$

Soient $n_0 \leq n$ des entiers relatifs et $u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_n$ des nombres réels. Les sommes de la forme $\sum_{k=n_0}^n (u_{k+1} - u_k)$ sont dites télescopiques. En effet, si l'on écrit cette somme en extension, tous les termes se simplifient sauf u_{n+1} et u_{n_0} .

Par exemple,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^7 (\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) + (\sqrt{8} - \sqrt{7}) \\ &= -\sqrt{2} + (\sqrt{3} - \sqrt{3}) + (\sqrt{4} + -\sqrt{4}) + (\sqrt{5} - \sqrt{5}) + (\sqrt{6} - \sqrt{6}) + (\sqrt{7} - \sqrt{7}) + \sqrt{8}. \end{aligned}$$

Finalement $\sum_{i=2}^7 (\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) = \sqrt{8} - \sqrt{2}$.

Exercice 3.3. Calculer les sommes télescopiques A et B suivantes :

$$A = \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right), \quad B = \sum_{k=1}^{99} [(k+1)^3 - k^3].$$

La notation $\prod$ est l'équivalent de la notation $\sum$ pour les produits. Notons $n_0 \leq n_1$ des entiers relatifs et $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_1}$ des nombres réels. On note

$$\prod_{i=n_0}^{n_1} x_i = x_{n_0} \times x_{n_0+1} \times \dots \times x_{n_1}.$$

Par exemple, $\prod_{i=1}^3 i^2 = 1^2 \times 2^2 \times 3^2$. Par convention, un produit vide est égal à 1.

Enfin, pour un entier n , on appelle factorielle n et on note $n!$ le nombre

$$n! = \prod_{i=1}^n i.$$

Par exemple, on a $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. D'après la convention sur le produit vide, on a $0! = 1$.

Exercice 3.4. Calculer les produits suivants :

$$A = \prod_{i=1}^3 (2i), \quad B = 4!, \quad C = 5!, \quad D = \frac{5!}{4!}, \quad E = \frac{4!}{5!}, \quad F = \prod_{k=1}^{11} \frac{k+2}{k+3}, \quad G = \prod_{k=1}^3 \left(1 + \frac{1}{k} \right).$$

3.4 Somme d'une suite arithmétique et géométrique

Proposition 3.6. 1. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Si q est un réel différent de 1, alors

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exercice 3.5. Démontrer les formules précédentes.

Exercice 3.6. Calculer les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=20}^{100} (k+1), \quad S_2 = \sum_{k=1}^{100} (5k+3), \quad S_3 = \sum_{k=20}^{100} \left(\frac{1}{2} \right)^k, \quad S_4 = \sum_{k=1}^{100} 5 \times 10^k, \quad S_5 = \sum_{k=1}^{20} (2 \times 2^k + 3k + 4).$$

Chapitre 4

Dénombrement

4.1 Trois formules classiques de dénombrement

4.1.1 Nombre de manières d'ordonner un ensemble fini

Problème concret : Mon équipe de foot est constituée de 11 joueurs, et j'ai 11 maillots, numérotés de 1 à 11. De combien de manière puis-je distribuer les maillots ?

Problème mathématique : Soit E un ensemble fini, formé de n éléments : $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. De combien de manière peut-on ordonner les éléments de E ?

Par exemple, considérons l'ensemble à deux éléments $E = \{x, y\}$. Il existe deux manières de l'ordonner : (x, y) et (y, x) .

L'ensemble à trois éléments $F = \{a, b, c\}$ peut être ordonné des manières suivantes :

$$(a, b, c); (a, c, b); (b, a, c); (b, c, a); (c, a, b); (c, b, a).$$

Il y a donc 6 manières de faire.

Pour trouver une formule générale, on a besoin de la définition suivante.

Définition 4.1. Soit n un entier positif. Le nombre $n!$ est défini comme

$$n! := n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Remarque 4.2. Cette définition peut aussi s'écrire comme $n! = \prod_{k=1}^n k$.

On a le résultat suivant :

Théorème 4.3. Soit E un ensemble fini de cardinal n . Il existe $n!$ manières d'ordonner les éléments de E .

Démonstration. Pour ordonner un ensemble à n éléments, il faut commencer par choisir le premier : on a n possibilités. On choisit ensuite le second, et on a $(n - 1)$ possibilité. Pour le troisième, on a $n - 2$ possibilités, etc. En tout, on a donc bien $n!$ possibilités. $\square$

Remarque 4.4. Si E est un ensemble de cardinal n , le nombre $n!$ est aussi

- le nombre de permutations de E , c'est-à-dire le nombre de bijections de E dans E ;
- le nombre de bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans E .

4.1.2 Nombre d'arrangements

Problème concret : 10 chevaux participent à une course. Pour jouer au tiercé, on doit prédire quel cheval arrivera premier, quel cheval arrivera deuxième, et quel cheval arrivera troisième. Combien y a-t-il de possibilités ?

Problème mathématique : Soit E un ensemble fini, formé de n éléments, et soit $p \leq n$. De combien de manière peut-on choisir une suite de p éléments de E distincts ?

Par exemple, si $E = \{a, b, c, d\}$ et si $p = 2$, il existe 12 manières de faire :

$$(a, b); (a, c); (a, d); (b, a); (b, c); (b, d); (c, a); (c, b); (c, d); (d, a); (d, b); (d, c).$$

Définition 4.5. Soit E un ensemble fini, formé de n éléments, et soit $p \leq n$. Un **arrangement** de p éléments de E est le choix d'une suite de p éléments de E distincts.

Remarquons qu'un arrangement de n éléments de E est simplement une manière d'ordonner E .

On a le résultat suivant :

Théorème 4.6. Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit $p \leq n$. Le nombre d'arrangements de p éléments de E est donné par :

$$A_n^p := \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1).$$

Démonstration. Pour choisir un arrangement de p éléments de E , je commence par choisir le premier élément : j'ai n possibilités. Je choisis ensuite le 2ème, et j'ai $n-1$ possibilités. Je continue ainsi jusqu'à choisir le p -ième élément, pour lequel j'ai $n-p+1$ possibilités. On a donc bien $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$ possibilités.

En remarquant que

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-p-1) \times (n-p) \times (n-p+1) \times \dots \times (n-1) \times n}{1 \times 2 \times \dots \times (n-p-1) \times (n-p)}$$

et en simplifiant les $(n-p)$ premiers termes, on trouve bien que $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$. $\square$

4.1.3 Nombre de combinaisons

Problème concret : Dans certaines variantes du poker, chaque joueur commence avec une main de 2 cartes, sur un jeu de 52 cartes. Combien de mains de départ différentes existe-t-il ?

Problème mathématique : Soit E un ensemble fini, formé de n éléments, et soit $p \leq n$. De combien de manière peut-on choisir p éléments de E distincts ?

Attention, ça n'est pas le même problème que précédemment : ici, l'ordre des p éléments choisis n'est pas pris en compte.

Par exemple, si $E = \{a, b, c, d\}$ et $p = 2$, il existe 6 manières de faire :

$$\{a, b\}; \{a, c\}; \{a, d\}; \{b, c\}; \{b, d\}; \{c, d\}.$$

Définition 4.7. Soit E un ensemble fini, formé de n éléments, et soit $p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments de E est le choix de p éléments de E distincts.

Théorème 4.8. Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit $p \leq n$. Le nombre de combinaisons de p éléments de E est donné par :

$$\binom{n}{p} := \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Le nombre $\binom{n}{p}$ est aussi noté C_n^p . Ces nombres sont appelés les coefficients binomiaux.

Démonstration. À partir d'une combinaison de p éléments de E , je peux construire plusieurs arrangements de p éléments de E : un pour chaque manière d'ordonner les p éléments choisis. Par conséquent, chaque combinaison de p éléments de E permet de construire $p!$ arrangements tous différents. De plus, les ensembles d'arrangements pouvant être construits à partir de deux combinaisons différentes sont disjoints. On en déduit que

$$A_n^p = p! \binom{n}{p},$$

et donc que $\binom{n}{p} := \frac{n!}{p!(n-p)!}$. □

Remarque 4.9. La démonstration ci-dessus, de nature combinatoire, montre que $\binom{n}{p}$ est un nombre entier. Il n'est pas évident de le montrer à partir de la définition et de propriétés arithmétiques!

Exercice 4.1. Au loto, on tire au hasard 5 boules parmi 49, puis 1 boule parmi 10. Calculez le nombre de possibilités.

Exercice 4.2. À la belote, on reçoit au premier tour 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Démontrer qu'il y a 201376 mains possibles au total.
2. Calculer le nombre de mains qui contiennent exactement 2 piques.
3. Démontrer qu'il y a 1540 mains qui contiennent *au moins* 3 as. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 as au premier tour?

Exercice 4.3. Vérifier que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. En déduire le nombre de parties d'un ensemble fini à n éléments.

4.2 Propriétés des coefficients binomiaux

4.2.1 Symétrie des coefficients

Proposition 4.10. Soit $n \geq 1$ un entier, et soit $0 \leq p \leq n$ un entier. On a

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Démonstration combinatoire. Choisir p éléments parmi n , c'est équivalent à choisir $(n-p)$ éléments (ceux qu'on ne prend pas). On a donc bien $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. □

Démonstration calculatoire. On a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{n-p}.$$

□

4.2.2 Le triangle de Pascal

Proposition 4.11 (La formule de Pascal). Soit $n \geq 2$ un entier, et soit $0 \leq p \leq n - 1$ un entier. On a

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Démonstration calculatoire. On a

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!(n-p)} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!p(n-1-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!} \left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!} \times \frac{n}{(n-p)p} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}. \end{aligned}$$

□

Démonstration combinatoire. Soit E un ensemble à n éléments, et soit x un élément quelconque de E . $\binom{n}{p}$ compte le nombre de parties de E ayant p éléments. Il y a deux types de parties de E à p éléments : celles contenant x , et celles ne contenant pas x .

Les parties de E à p éléments ne contenant pas x sont aussi des parties de $E \setminus \{x\}$ contenant p éléments. Il y en a donc $\binom{n-1}{p}$, car $E \setminus \{x\}$ contient $n - 1$ éléments.

Il y a $\binom{n-1}{p-1}$ parties de E à p éléments contenant x : elles sont toutes construites en ajoutant $\{x\}$ à une partie de $E \setminus \{x\}$ ayant $p - 1$ éléments.

On a donc bien $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$

□

La formule de Pascal nous incite à calculer les coefficients binomiaux en les écrivant dans un triangle comme suit.

- On commence par remplir les cases où $p = 0$ et celles où $p = 1$ de 1.
- On remplit les cases où $p > n$ de zéros (par convention).
- Puis on remplit les autres cases de haut en bas, grâce à la règle suivante : chaque case est la somme de la case au dessus et de la case au dessus à gauche.

	0	1	2	3	4	...	$k-1$	k	...	$n-1$	n
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
$\vdots$						$\ddots$					
$k-1$							1				
k								1			
$\vdots$									$\ddots$		
$n-1$	1	$n-1$					$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$		1	
n	1	n						$\binom{n}{k}$		n	1

Exercice 4.4. Déterminer la 7ème ligne du triangle de Pascal.

4.2.3 La formule du binôme de Newton

Vous connaissez la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Celle-ci se généralise à des puissances plus grande que 2 : c'est la formule dite du binôme de Newton.

Théorème 4.12. Soit $n \geq 1$ un entier. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Démonstration. On a $(x+y)^n = (x+y) \times (x+y) \times \dots \times (x+y)$. En développant le produit, je vais obtenir des termes qui sont tous de la forme $x^k y^{n-k}$, pour des k entre 0 et n . Le nombre de fois que je vais obtenir le terme $x^k y^{n-k}$ est égal au nombre de manière de choisir k éléments parmi n , et donc à $\binom{n}{k}$. On en déduit donc bien que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. $\square$

4.3 Exercices supplémentaires

Exercice 4.5. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)! - k! = k.k!$.

En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n! = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} k.k!$$

Exercice 4.6. Combien y a-t-il de numéro de téléphone français qui commencent par 04 89?

Exercice 4.7. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{2} = 1 + 2 + \dots + n - 1$.

Exercice 4.8. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$

Exercice 4.9. Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard, ce qu'on appelle « une main ».

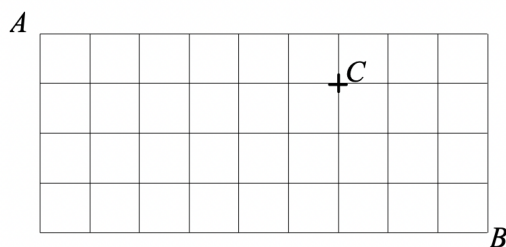


FIGURE 4.1 – Exercice 4.13

1. Combien de mains contiennent 5 carreaux ou 5 piques ?
2. Combien de mains contiennent 2 carreaux et 3 piques ?
3. Combien de mains contiennent au moins un roi ?
4. Combien de mains contiennent au plus un roi ?
5. Combien de mains exactement 2 rois et exactement 3 piques ?

Exercice 4.10. On appelle *diagonale* d'un polygone tout segment joignant deux sommets et qui n'est pas un côté du polygone.

1. Combien y a-t-il de diagonales dans un polygone à n sommets ?
2. Quels polygones ont autant de côtés que de diagonales ?
3. Quels polygones admettent exactement 1325 diagonales ?

Exercice 4.11. On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières.
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Exercice 4.12. Une table ronde comporte cinq places, numérotées de 1 à 5. On veut répartir Anushka, Bianca, Charif, Derick et Émilie autour de la table. Mais, Derick et Émilie ne s'entendent pas du tout, et il ne faut pas les placer côte à côte. Combien y-a-t-il de dispositions possibles ?

Exercice 4.13.

1. Dans le quadrillage de la Figure 4.1, combien y a-t-il de chemins qui mènent de A à B ? (seuls les déplacements vers la **D**roite et vers le **B**as sont autorisés) *Indication : On pourra dénombrer le nombre de mots de 13 lettres qui contiennent 9 fois la lettre D et 4 fois la lettre B .*
2. Combien de ces chemins passent par le point C ?

Chapitre 5

Géométrie dans le plan

5.1 Vecteurs du plan

L'ensemble des vecteurs du plan est noté

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Étant donné deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ du plan, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \in \mathbb{R}^2.$$

En particulier, nous pouvons identifier les points du plan avec les vecteurs du plan via l'application $M \mapsto \overrightarrow{OM}$, où $O(0, 0)$ est l'origine du plan.

Il y a deux opérations fondamentales sur les vecteurs :

— **La somme** : étant donné deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, on définit la somme

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \in \mathbb{R}^2.$$

— **La multiplication par un scalaire** : étant donné un vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ dans $\mathbb{R}^2$ et un nombre réel λ (appelé **scalaire**), on définit

$$\lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 5.1. Considérons les vecteurs $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 4)$ et $\vec{w} = (0, 1)$.

1. Représenter les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sur le plan.
2. Calculer les vecteurs

$$\vec{u} + \vec{v}, \quad 3\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}, \quad -\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}.$$

Exercice 5.2. Soit A, B et C trois points du plan. Montrer les égalités suivantes

1. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$, une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur $\vec{w}$ de la forme

$$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \text{ pour certains } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Les deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sont

- **orthogonaux** si $u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$,
- **colinéaires** si $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Finalement, la **norme** de $\vec{u}$ est définie par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \in \mathbb{R}.$$

Définition 5.1. — Une **base** de $\mathbb{R}^2$ est une paire $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs telle que tout vecteur $\vec{w}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. C'est à dire

$$\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^2, \exists ! \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}.$$

La paire (λ, μ) est appelée **coordonnées du vecteur** $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

— Un **repère** du plan est un triplet $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où Ω est un point du plan et $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En particulier, pour tout point M du plan, il existe une unique paire (λ, μ) de réels telle que

$$\overrightarrow{\Omega M} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}.$$

La paire (λ, μ) est appelée **coordonnées du point** M dans le repère (Ω, A, B) .

Exemple 5.2. 1. Pour $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$, la paire $(\vec{i}, \vec{j})$ est appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^2$: c'est en utilisant cette base que les coordonnées d'un vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ sont (u_1, u_2) .

2. De même, le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est le repère canonique : c'est dans ce repère que les coordonnées de $M(x, y)$ sont (x, y) .

Exercice 5.3. Dans les cas suivant, dire si la paire $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteur est colinéaire, orthogonale, ou forme une base de $\mathbb{R}^2$.

1. $\vec{u} = (1, 0)$ et $\vec{v} = (0, 1)$.
2. $\vec{u} = (3, 2)$ et $\vec{v} = (-1, 4)$.
3. $\vec{u} = (5, 5)$ et $\vec{v} = (1, 1)$.
4. $\vec{u} = (2, 3)$ et $\vec{v} = (-3, 2)$.
5. $\vec{u} = (6, 2)$ et $\vec{v} = (-3, -1)$.
6. $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
7. $\vec{u} = (0, 0)$ et $\vec{v} = (0, -4)$.

Dans les cas où $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base, donner les coordonnées du vecteur $\vec{w} = (4, 1)$.

Proposition 5.3. Soit $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ deux vecteurs d plan.

1. La paire $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base si et seulement si $u_1 v_2 - v_1 u_2 \neq 0$.
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$.

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathbb{R}^2$ où $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$. On dit que la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est

1. **Orthonormée** si la paire $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthogonale et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$.
2. **Directe** si $u_1 v_2 - u_2 v_1 > 0$.
3. **Indirecte** si $u_1 v_2 - u_2 v_1 < 0$.

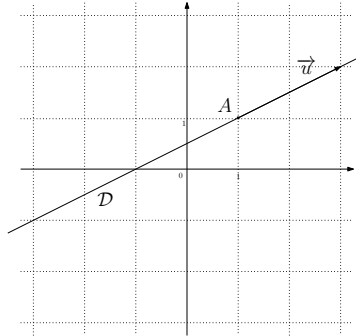
Exercice 5.4. Dans les bases de l'Exemple 5.3, dire si elles sont orthonormées, directes ou indirectes.

5.2 Droites du plan

5.2.1 Définition

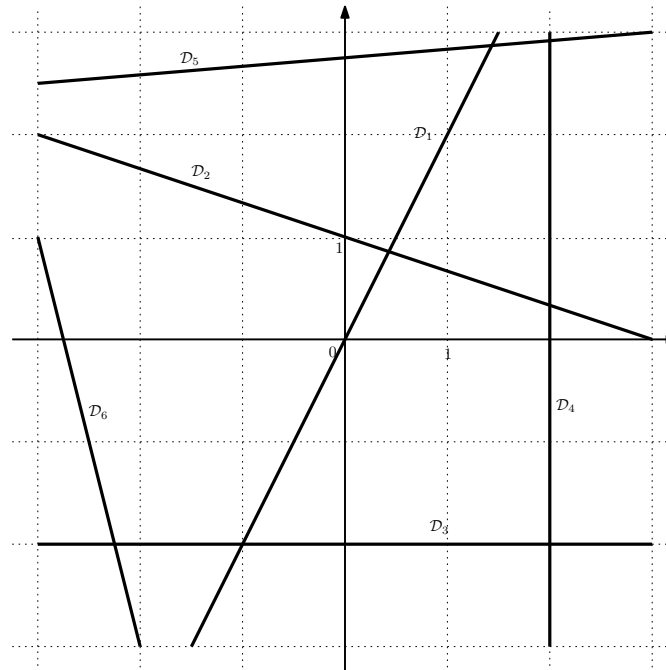
Définition 5.4. Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul. La droite (affine) $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Sur la figure suivante, on a représenté la droite passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (2,1)$.



Remarquons que le vecteur directeur d'une droite n'est pas unique, mais que deux vecteurs directeurs sont colinéaires.

Exercice 5.5. Pour chacune des droites suivantes $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5$ et $\mathcal{D}_6$, déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de la droite.



Sur le même dessin, tracer la droite passant par le point $A(-1,1)$ de vecteur directeur $\vec{u}(2,-1)$ et la droite passant par le point $B(1,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(1,0)$.

5.2.2 Équation paramétrique

Notons $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $u = (\alpha, \beta)$. Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire

$$(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= x_A + \lambda\alpha \\ y &= y_A + \lambda\beta \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nous appelons une telle équation **une équation paramétrique de $\mathcal{D}$** .

Exercice 5.6. Donner une équation paramétrique des droites de l'Exercice 5.5.

5.2.3 Équation cartésienne

Soit $A(x_A, y_A)$ un point du plan, $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul, et $\mathcal{D}$ la droite. Un point $M(x, y)$ du plan appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM} = (x - x_A, y - y_A)$ et $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ sont colinéaires. En utilisant la Proposition 5.3, on obtient

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0.$$

En posant $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_A - \beta x_A$, on obtient que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des solutions à l'équation

$$ax + by + c = 0.$$

On appelle une telle équation un **équation cartésienne** de $\mathcal{D}$. Remarquons que le vecteur $\vec{v} = (a, b) = (\beta, -\alpha)$ est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ de $\mathcal{D}$ (et donc à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$).

Exercice 5.7. Pour chacune des équations suivantes, déterminer si l'ensemble des solutions est une droite. Si c'est le cas, tracer la droite en question et en donner un point et un vecteur directeur.

- | | | |
|----------------------|---------------------------|-------------|
| 1. $y = 2x - 1$ | 4. $4y + x + 4 = -2 + 2x$ | 7. $y = -1$ |
| 2. $2y + 6x - 3 = 0$ | 5. $x = 9$ | |
| 3. $y + x^2 = 0$ | 6. $xy = 0$ | |

Exercice 5.8. Tracer et donner une équation cartésienne de la droite :

1. Passant par les points $A(0, 0)$ et $B(4, 2)$
2. Passant par les points $A(1, 1)$ et $B(20, 10)$
3. Passant par les points $A(1, 1)$ et $B(1, 20)$.
4. Passant par le point $A(1, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{vd}(-1, 1)$
5. Passant par le point $A(2, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{vd}(0, 3)$
6. Passant par le point $A(-1, 5)$ et de vecteur directeur $\vec{vd}(40, 40)$

Exercice 5.9. Donner une équation cartésienne des droites de l'Exercice 5.5.

5.2.4 Intersections de droites

Proposition 5.5. Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites du plan. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ s'intersecte en un unique point.
2. Les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont linéairement indépendants.

Dans ce cas, nous dirons que les droites sont **sécantes**.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas sécantes.
2. L'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est vide ou infinie.
3. Les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont colinéaires.

Dans ce cas, nous dirons que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **parallèles**.

Exercice 5.10. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection entre les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $y = 2x + 3$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $y = -x + 4$.
2. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $2y + x = 3$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $y + 2x = 4$.
3. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $2x + y = 2$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $-2y - 4x = -3$.
4. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $2x + y = 2$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $-2y - 4x = -4$.
5. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par les points $A(1, 1)$ et $B(3, 2)$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par les points $A'(0, 1)$ et $B'(4, 2)$.
6. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par le point $A(1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(1, -1)$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par les points $A'(0, 1)$ et $B'(1, 0)$.

Exercice 5.11. Dans chacun des cas suivants, résoudre le système et l'interpréter géométriquement.

1. $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = 3 \end{cases}$

Chapitre 6

Fonctions usuelles

6.1 Fonctions réelles : premières définitions

Nous appellerons **fonction (réelle)** une application $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, où D_f est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ appelé le **domaine de définition** de la fonction f .

Exercice 6.1. Déterminer le plus grand domaine de définition sur lequel les fonctions suivantes peuvent être définies :

1. $f_1(x) = \frac{x-1}{4x^2+4x+1}$

2. $f_2(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

3. $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$

4. $f_4(x) = \ln(x^2 - 3x)$

5. $f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$

6. $f_6(x) = \frac{x}{\exp(x^2)+1}$.

Le **graphe** d'une fonction $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ est le sous-ensemble

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, x \in D_f\}.$$

6.2 Fonctions usuelles

Nous décrivons maintenant un certain nombre de fonctions usuelles, dont les graphes sont représentés dans la Figure 6.1.

6.2.1 Fonctions puissance entière

Soit $k \in \mathbb{N}$, la fonction puissance est donnée par

$$\begin{aligned} f_k : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^k. \end{aligned}$$

Si de plus $k > 0$, on définit

$$\begin{aligned} f_{-k} : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^k}. \end{aligned}$$

6.2.2 Fonction exponentielle

La proposition suivante sera admise :

Proposition 6.1. Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 1.$$

Nous l'appellerons **fonction exponentielle** et noterons $f(x) = \exp(x)$ ou $f(x) = e^x$.

Proposition 6.2. Soit a et b deux réels et k un entier naturel. On a

- | | |
|------------------------------|---|
| 1. $e^0 = 1$ | 5. $e^1 = e = 2,71 \dots$ |
| 2. $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ |
| 3. $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ |
| 4. $(e^a)^k = e^{ka}$ | |

Exercice 6.2. Simplifier les expressions suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $A = e^x \times e^{-x}$ | 6. $G = \frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$ |
| 2. $B = e^x + 2e^x, C = (e^x)^3 e^{-2x}$ | 7. $H = \sqrt{3e^{-x} + 6e^{-x}}$ |
| 3. $D = (e^x)^{-2} e^{3x}$ | 8. $I = \sqrt{\frac{2e^{3x+1}}{e^{2x-1}}}$ |
| 4. $E = e^{3x+2} \times e^{1-2x}$ | |
| 5. $F = \frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$ | |

6.2.3 Fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle réalise une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, pour tout $x > 0$ l'équation $e^y = x$ possède une unique solution que nous noterons $y = \ln(x)$. La fonction

$$\begin{array}{ccc} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto \ln(y) \end{array}$$

est appelée **logarithme népérien**. En particulier, la fonction $\ln$ est caractérisée par les équations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ln(e^x) = x \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}_{>0} e^{\ln y} = y.$$

Proposition 6.3. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$. On a

- | | |
|--|--|
| 1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ | 5. $\ln(e) = 1$ |
| 2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ | 6. $e^{\ln a} = \ln(e^a) = a$ |
| 3. $\ln(a^k) = k \ln(a)$ | 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ |
| 4. $\ln(1) = 0$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ |

Exercice 6.3. Calculer $x = \ln 216 - 3(\ln 2 + \ln 3)$ et $y = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2 \ln 10 - \ln \frac{1}{4}$.

6.2.4 Fonctions puissance réelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On définit

$$\begin{array}{ccc} f_\alpha : &]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto e^{\alpha \ln(x)} \end{array}$$

Exercice 6.4. Démontrer les égalités suivantes pour tout $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$
- $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

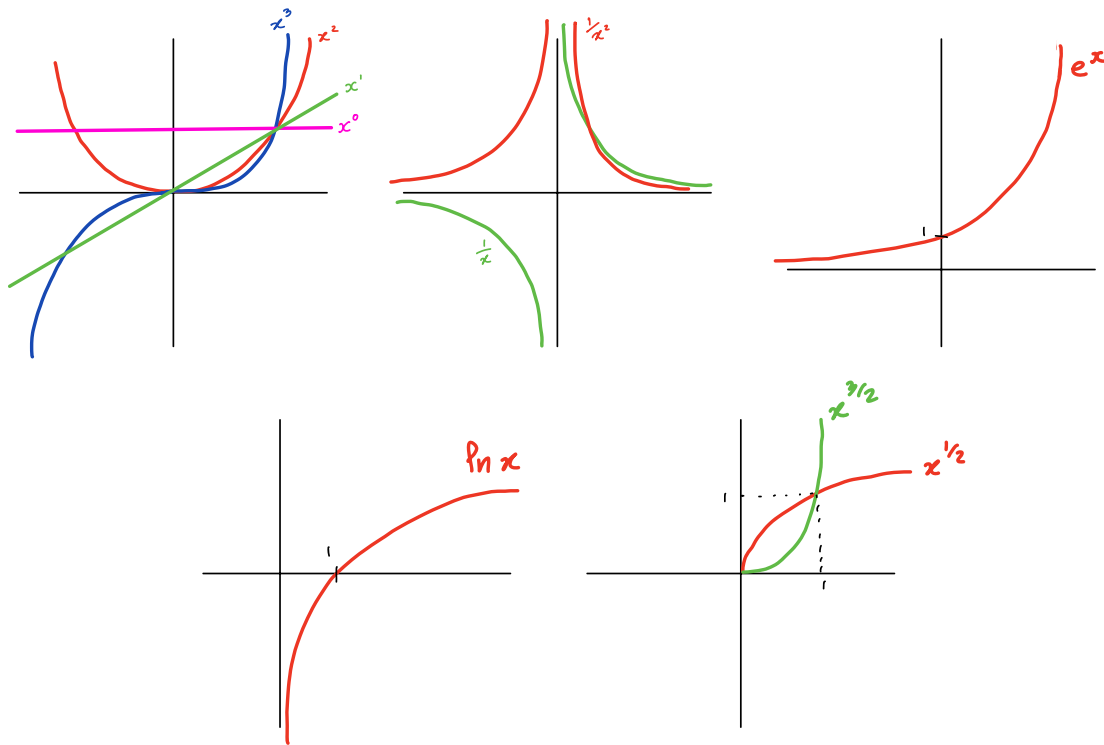


FIGURE 6.1 – Graphes des fonctions usuelles

6.3 Limites de fonctions

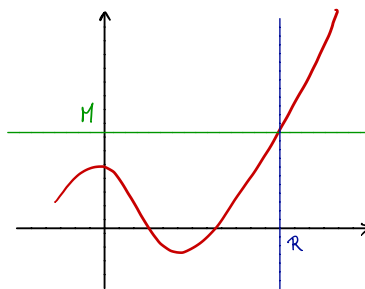
6.3.1 Limites : définitions

Définition 6.4. Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini, et on le note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists R \in \mathbb{R} \text{ tel que si } x > R \text{ alors } f(x) > M.$$

Cette définition est illustrée dans la Figure 6.2.

De manière analogue, on peut définir :

FIGURE 6.2 – $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

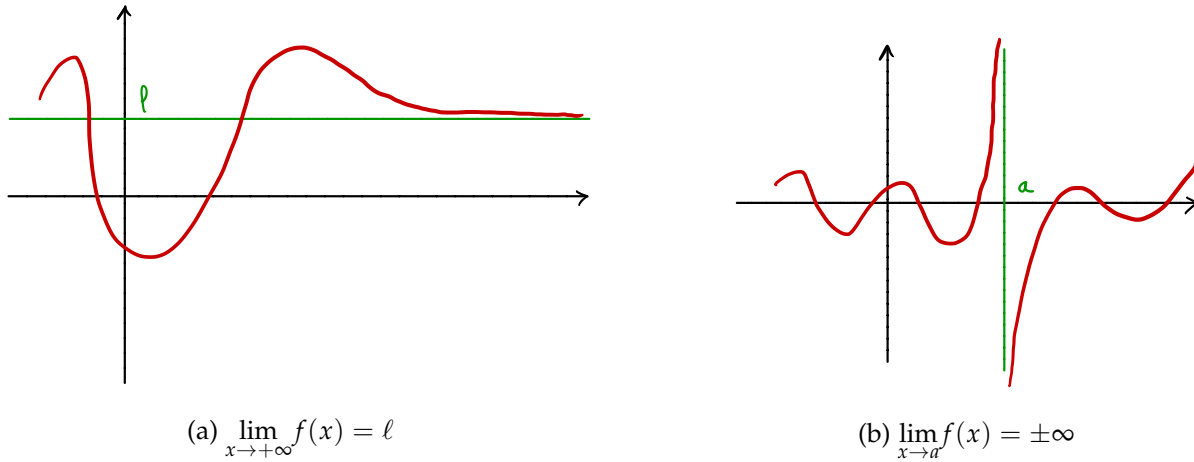


FIGURE 6.3

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$. On parle dans ce cas d'**asymptote horizontale**. Cette limite est illustrée en Figure 6.3a.
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$. On parle dans ce cas d'**asymptote verticale**. Cette limite est illustrée en Figure 6.3b.
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

Exercice 6.5. Parmi les fonctions $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{x}$ et $f_4(x) = x^{-2}$, lesquelles ont une représentation graphique qui admet une asymptote horizontale en $+\infty$ ou $-\infty$?

6.3.2 Opérations sur les limites

f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

f a pour limite	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f \cdot g$ a pour limite	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
g a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$	0^+	0^+	0^-	0^-	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Composée de limites. Soient a, b et c des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Soient f et g deux fonctions.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Exercice 6.6. Soient les 3 fonctions suivantes.

$$f_1(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x+2}, \quad f_2(x) = 2 - \frac{5}{x^2}, \quad f_3(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{1+x}.$$

Déterminer les limites de f_1 , f_2 et f_3 en $+\infty$ et $-\infty$. Déterminer la limite de f_1 en -2 , la limite de f_2 en 0 et la limite de f_3 en -1 .

Exercice 6.7. Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 7x + 5)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{2x-3}{x^2+x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{2x-3}{x^2+x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{(x-1)^2}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$.

6.3.3 Comment lever une indétermination

Les **quatre formes indéterminées** sont : $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$.

Une méthode consiste à **mettre le terme prépondérant en facteur**.

Exercice 6.8. Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - 3x + 5$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-5x+7}{3x^2+x+1}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-x+5}{x+1}$
4. $\lim_{x \rightarrow -1, x > -1} \frac{4x^2-x+5}{x+1}$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$.

6.4 exercices supplémentaires

Exercice 6.9. Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - (x-2)^2)$.

Exercice 6.10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{-x} + 1 = 0$
2. $e^{3x+1} - e^{-x} < 0$
3. $e^{2x} + 2e^x < 3$
4. $e^{3x} = 4$
5. $e^{-2x} < 2$.

Exercice 6.11. Dans chacun des cas suivants, déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

1. $f : x \mapsto e^{3-x}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \frac{e^{2x}+2}{e^x-1}$ sur $\mathbb{R}^*$,
3. $f : x \mapsto e^{2x} - e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$,
4. $f : x \mapsto e^{\frac{1+x^2}{1+x}}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Exercice 6.12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(5-x) > 2\ln(x+1)$
2. $\ln x = 0; (2+x)\ln(x-3) = 0$
3. $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln(4+2x)$
4. $\ln x \geq 2\ln 5$
5. $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 0$
6. $2^x = 3^{2x+1}; \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$
7. $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 \leq 0$

Exercice 6.13. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{3x+5}{x-1} \right)$

2. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln \left(\frac{1-x}{x+2} \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \left(\frac{1-x}{x+2} \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{e^x+1}{2e^x+3} \right)$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{e^x+1}{2e^x+3} \right)$

Exercice 6.14. Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes en 0^+ et en $+\infty$:

1. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

2. $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

3. $h(x) = \frac{-1}{\ln x - 1}$

4. $i(x) = (\ln x)^2 - \ln x.$

Chapitre 7

Études de fonctions

7.1 Continuité

Pour ce cours, nous nous limiterons à la notion intuitive suivante de continuité : si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue** si **on peut tracer son graphe “sans lever le crayon”**.

Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition :

1. $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{R}$,
2. $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{R}^*$,
3. $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,
4. $f(x) = \ln x$ sur $]0, +\infty[$,
5. $f(x) = \exp x$ sur $\mathbb{R}$.
6. $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$.

En additionnant, en multipliant et en quotientant (à condition, de se situer en dehors des points qui annulent le dénominateur) des fonctions continues, on construit de nouvelles fonctions continues.

Exemples. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ et les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

7.2 Dérivabilité

7.2.1 Premières définitions

Définition 7.1. Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D_f$.

1. On dit que f est **dérivable en a** si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda .$$

Dans ce cas λ est appelé **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$.

2. On dit que f est **dérivable sur D_f** si f est dérivable en tout point de D_f . Dans ce cas, la **fonction dérivée** de f est la fonction

$$\begin{array}{ccc} f' : D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} .$$

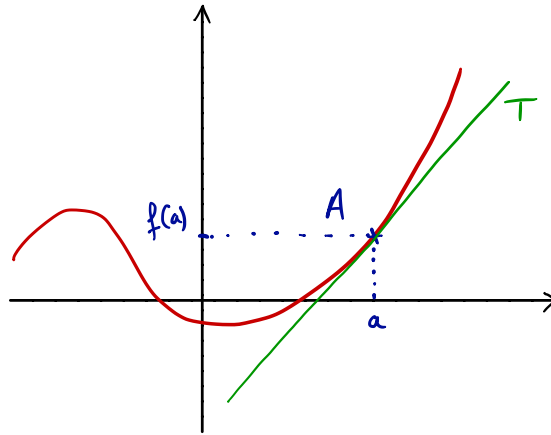
Remarque 7.2. Une fonction dérivable est continue. Cependant, la réciproque est fausse !

7.2.2 Droite tangente

Définition 7.3. Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in D_f$, $\mathcal{C}_f$ le graphe de f et $A(a, f(a)) \in \mathcal{C}_f$. La **tangente à $\mathcal{C}_f$ en A** est la droite T passant par A et de pente $f'(a)$.

En particulier, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(a, f(a))$ a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



Exercice 7.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x + 1)^2 + 2$.

1. Calculer $f'(0)$.
2. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(0, 3)$.

7.2.3 Calculs de dérivées

Pour calculer la dérivée d'une fonction à partir de son expression, on se sert le plus souvent des formules et règles suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$g(x) = f(ax + b)$	$af'(ax + b)$

Remarque 7.4. Les valeurs $\alpha \in \{0, -1, \frac{1}{2}\}$ donnent les dérivées suivantes

$$(1)' = 0, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Du plus, si u et v sont deux fonctions dérivables, alors leur somme, produit et quotient le sont (lorsque définis) avec

$f(x)$	$f'(x)$
$u + v$	$u' + v'$
$ku, k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$

Pour la composition, nous avons

Proposition 7.5. Soit f et g deux fonctions telles que g est dérivable en x et f est dérivable en $f(x)$. Alors la composition $f \circ g$ est dérivable en x avec

$$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x)).$$

La proposition précédente donne les formules suivantes

$f(x)$	$f'(x)$
$u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
e^u	$u' e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Exercice 7.2. Calculer les dérivées des fonctions définies par

1. $f(x) = 4x^2 + 8x - 7$
2. $f(x) = \frac{x^2+3x-7}{10}$
3. $f(x) = 3e^x + \ln(x) + \sqrt{x}$
4. $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^2+x}$
5. $f(x) = 4xe^x$
6. $f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$
7. $f(x) = e^{x^3}$
8. $f(x) = \frac{1}{2x^2 - \cos(x)}$
9. $f(x) = (2x+1)^4$
10. $f(x) = xe^{x \ln(x)}$
11. $f(x) = \cos(e^{x^2+1})$

Exercice 7.3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes en son point d'abscisse a .

$$f_1 : x \mapsto x^2 - 3x + 1 \text{ en } a = 2; f_2 : x \mapsto \sqrt{x} + 3 \text{ en } a = 1; f_3 : x \mapsto \frac{2x}{x+2} \text{ en } a = 0.$$

7.3 Représentation graphique d'une fonction

Définition 7.6. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

1. f est croissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$. f est décroissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$.
2. f est strictement croissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$. f est strictement décroissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.
3. f est constante sur I ssi $\forall a, b \in I$, $f(a) = f(b)$.
4. On dit que f est monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I . On dit que f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I .

Proposition 7.7. Soit f une fonction dérivable sur I .

1. Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I .
2. Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

7.3.1 Procédé

Afin de tracer le graphe d'une fonction, on procède ainsi :

1. On précise les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité.
2. Là où c'est possible, on calcule la dérivée f' et on étudie son signe. Ceci indique les variations de la fonction f (on reporte les résultats dans un tableau).

3. On détermine les éventuels extrema de f et la valeur qu'elle y prend.
4. On calcule les limites de f aux bornes du domaine de définition.
5. On détermine les éventuelles asymptotes.
6. On peut aussi calculer, à la main, quelques valeurs simples prises par la fonction f .
7. Puis, on reporte le tout dans un plan muni d'un repère.

Exercice 7.4. Soit f la fonction définie par la formule

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}.$$

1. Déterminer le plus grand sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction f est bien définie.
2. Déterminer les différentes limites de f aux bornes de l'ensemble D_f .
3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations de f .
5. Tracer le graphe de f .

7.3.2 Exercices supplémentaires.

Exercice 7.5. .

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. Prouvez que f n'est pas dérivable en zéro.
2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Prouvez que g n'est pas dérivable en zéro.
3. Soit h telle que $h(x) = 2 - x^2$ si $x < 1$ et $h(x) = \frac{1}{x}$ si $x \geq 1$. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas dérivable en 1.

Exercice 7.6. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ | 4. $f(x) = \ln \sqrt{5-4x}$ |
| 2. $f(x) = (x-1)[2\ln(x) + 5]$ | 5. $f(x) = \ln \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right)$ |
| 3. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ | |

Exercice 7.7. Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f(x) = \left(\frac{x}{3+2\sqrt{x}} \right)^2$
2. $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x},$
3. $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}.$

Exercice 7.8. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à la droite d d'équation $y = -4x + 6$?

Chapitre 8

Calcul intégral

8.1 Intégrale d'une fonction continue

Choisissons un repère orthogonal $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$. L'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$ où K est le point de coordonnées $(1, 1)$.

Définition 8.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et C_f sa courbe représentative. L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire (en unité d'aire) du domaine situé entre C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On la note $\int_a^b f(x)dx$.

Remarque 8.2. 1. Plus généralement, si f est de signe quelconque, l'intégrale est donnée par l'aire algébrique, c'est à dire en comptant négativement l'aire lorsque f est négative.

2. Si $b < a$, on pose

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx .$$

3. La relation de Chasles est satisfaite : pour tout a, b, c d'un intervalle de définition de f , on a

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx .$$

Théorème 8.3 (THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) ,$$

où F est une primitive de f , c'est à dire une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $F' = f$.

8.2 Calcul de primitives et d'intégrales

Théorème 8.4. Toute fonction f continue sur un intervalle admet des primitives. De plus, si F est une primitive de f , alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble $\{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$.

8.2.1 Primitives de base

$f(x)$ est définie par	I	les primitives de f sur I sont
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_{>0}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$\ln(x)$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$

En appliquant la première formule aux cas $\alpha = -2$ et $\alpha = -1/2$, on obtient les formules classiques suivantes

$f(x)$ est définie par	I	les primitives de f sur I sont
$\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_{<0}$ ou $\mathbb{R}_{>0}$	$-\frac{1}{x} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_{>0}$	$2\sqrt{x} + C$

Exercice 8.1. Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I .

1. $f(x) = x - 7$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 4x^2 + 7x - 6$ et $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + 1$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = 4x^3 + 3e^x + \sqrt{x}$ sur $I = [0, +\infty[$.
5. $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}$ sur $I =]0, +\infty[$.
6. $f(x) = 10e^x + \frac{18x-\pi}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8.2. Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I vérifiant la condition indiquée.

1. $f(x) = 4x^2 - 3x + 2, I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 0$.
2. $f(x) = 3x + 1 + \frac{1}{x^2}, I =]-\infty, 0[$ et $F(-2) = 1$.
3. $f(x) = (x^2 + 1)^2, I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 0$.
4. $f(x) = e^{x+1}$ et $F(\ln 2) = 0$.

Exercice 8.3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^{-1} (t^2 - 4t + 3) dt$.
2. $\int_1^3 \frac{4+t^2}{t} dt$.
3. $\int_0^\pi \cos t dt$.
4. $\int_1^2 (t^2 + t - \frac{1}{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}) dt$.

8.2.2 Primitives de composition

Rappelons la formule de la dérivée d'une composition (voir Chapitre précédent) :

$$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x)).$$

En l'appliquant à f une fonction usuelle, nous obtenons le formulaire de primitive suivant :

fonction f	primitives de f sur I	conditions sur u
$u'u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + C$	$u(x) > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$	$u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u'e^u$	$e^u + C + C$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$ sur I

Exercice 8.4.

1. Calculer les primitives suivantes

a. $f : x \mapsto \frac{1}{(2x-1)^4}$ sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$;

b. $f : x \mapsto x^2 e^{2x^3}$ sur $\mathbb{R}$;

c. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$;

d. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$ sur $I =]0, +\infty[$

2. Calculer les intégrales suivantes

a. $\int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$;

b. $\int_0^1 5(e^{x+9} + x^9)dx$;

c. $\int_{-1}^1 \frac{1}{2x+3} dx$.

8.3 Exercices supplémentaires.

Exercice 8.5. Déterminer une primitive sur I pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$ sur $\mathbb{R}$;

2. $f : x \mapsto \frac{5}{x^3}$ sur $]0, +\infty[$;

3. $f(x) = 2\sqrt{2x+3}$ sur $] -\frac{3}{2}, +\infty[$;

4. $g(x) = \frac{e^{3x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$,

5. $h(x) = 3xe^{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$,

6. $i(x) = \frac{e^x}{(3e^x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$,

7. $j(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2e^x+1}}$ sur $\mathbb{R}$.

8. $f : x \mapsto \frac{2}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$.

9. $g : x \mapsto \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2}$ sur $]0, +\infty[$.

10. $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8.6. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_4^1 \frac{e^{\sqrt{t}-1}}{2\sqrt{t}} dt$,

2. $\int_{-1}^2 |x^2 - 2x| dx$,

3. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t/2) dt$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t/2) dt$ (calculer d'abord $J + K$ et $J - K$).