Période Enjeux – Maths0

Portail ST

Année 2024-2025

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

Table des matières

Chapitre 1

Éléments de logique et théorie des ensembles

1.1 Ensembles

Un **ensemble** est une collections d'objets, que l'on appelle les **éléments** de l'ensemble. Les ensembles se notent entre accolades, par exemple

$$A = \{1, 4, 8\}$$

est l'ensemble contenant 3 éléments : les nombres 1, 3 et 8. L'appartenance à un ensemble est notée $\in$.

Exemple 1.1.

1. *L'ensemble des **entiers naturels** est*

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}\ .$$

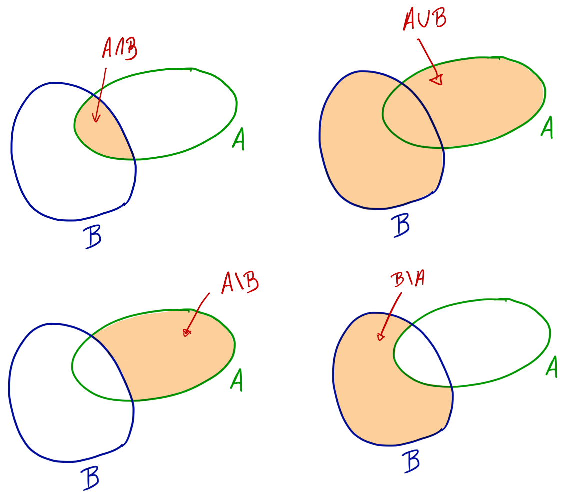
2. *L'ensemble des **entiers relatifs** est*

$$\mathbb{Z} = \{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}\ .$$

3. *L'ensemble des **rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des fractions de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs.*
4. *L'ensemble des **réels** est noté $\mathbb{R}$.*
5. ***L'ensemble vide**, noté $\emptyset$, est l'ensemble ne contenant aucun élément.*

Définition 1.2. *Soit A et B deux ensembles.*

1. *On dit que A est **inclus** dans B si tout élément de A appartient à B (on dit aussi que A est un **sous-ensemble** de B). On notera $A \subset B$.*
2. *Le **complémentaire** d'un sous-ensemble A de B est l'ensemble A^c des éléments de B qui ne sont pas dans A.*
3. ***L'union** de A et B est l'ensemble $A \cup B$ des éléments appartenant à A ou à B.*
4. ***L'intersection** de A et B est l'ensemble $A \cap B$ des éléments appartenant à A et à B.*
5. ***La différence** de A par B est l'ensemble $A \setminus B$ des éléments qui appartiennent à A mais n'appartiennent pas à B.*



Exercice 1.3. Décrire les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$ lorsque

1. $A = \{-1, 4, 8, 10, \pi\}$ et $B = \{4, 10, \pi, -1\}$.
2. $A = \{a, d, g, t, r, s\}$ et $B = \{r, d, u, w, g\}$.
3. $A = \mathbb{N}$ et $B = \mathbb{Z}$.
4. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{N}$.

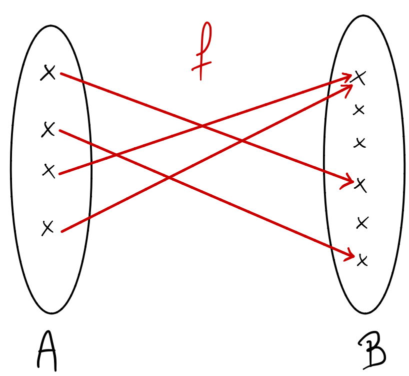
Proposition 1.4 (Loi de Morgan). *Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.*

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Exercice 1.5. Soient A et B deux sous-ensemble d'un ensemble E. Vérifier que $A \setminus B = A \cap B^c$.

1.2 Applications

Une **application** f d'un ensemble A vers un ensemble B est une loi, notée $f : A \to B$ associant à tout élément $x \in A$ un unique élément $f(x) \in B$. Schématiquement, une telle application est représentée par



Exemple 1.6.

1. *L'application qui associe à un étudiant de L1 sa taille est une application de l'ensemble des étudiants de L1 dans l'ensemble des nombres réels.*
2. *L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à un nombre réel x le nombre réel $f(x) = x^2 - 7$.*

Étant donné une application $f : A \to B$ et un élément $y \in B$, un **antécédent** de y par f est un élément $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Définition 1.7. *Soit $f : A \to B$ une application.*

1. *f est dite **injective** si tout élément de B possède au plus un antécédent.*
2. *f est dite **surjective** si tout élément de B possède au moins un antécédent.*
3. *f est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective.*

Exercice 1.8. Dans les cas suivant, dire si la fonction f est injective, surjective, ou bijective :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 4$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$.

1.3 Logique

Une **assertion** est une phrase, mathématique ou non, dont on peut dire sans ambiguïté si elle est vraie (1) ou fausse (0). Pour écrire les assertions mathématiques, nous utiliserons souvent les notations suivantes (aussi appelées *quantificateurs*) :

$$\forall \ : \ \text{pour tout} \quad \exists \ : \ \text{il existe} \quad \nexists \ : \ \text{il n'existe pas} \quad \exists! \ : \ \text{il existe un unique.}$$

Exemple 1.9.

1. *Aujourd'hui il pleut.*
2. *Au moins un étudiant de la classe a plus de 18 ans.*
3. *Tous les étudiants de L1 aiment les mathématiques.*
4. $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ x > 0.$
5. $\forall x \in \mathbb{N}\,,\ -x \in \mathbb{N}.$
6. $\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{N}$ *tel que* $y > x$.
7. $\exists y \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{Q}$ *on a* $y > x$.

Définition 1.10. *La **négation** d'une assertion A est l'assertion $\overline{A}$ qui est vraie lorsque A est fausse, et fausse lorsque A est vraie.*

Il est très pratique de représenter les relations entre différentes assertions via leurs **tables de vérité**. Par exemple :

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Exercice 1.11. Donner les négations des assertions de l'exemple 1.9.

Exercice 1.12. Dans les cas suivant, dire si l'assertion est vraie ou fausse, et donner sa négation :

1. $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $x + y = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $xy = 1$.
3. $\forall \epsilon > 0\ \exists x > 0$ tel que $x < \epsilon$.
4. $\forall \epsilon > 0 \exists x \in \mathbb{N}^*$ tel que $x < \epsilon$.

Définition 1.13. *Soit A et B deux assertions.*

1. ***A et B*** *est l'assertion notée* $A \wedge B$*, qui est vraie si et seulement si* A *est vraie et* B *est vraie.*
2. ***A ou B*** *est l'assertion notée* $A \vee B$*, qui est vraie si et seulement si* A *est vraie ou* B *est vraie.*
3. ***A implique B*** *est l'assertion notée* $A \Rightarrow B$ *qui est vraie si et seulement si* A *est fausse, ou* A *et* B *sont simultanément vraies.*
4. A ***est équivalente à*** B *est l'assertion notée* $A \Leftrightarrow B$*, qui est vraie si et seulement si* A *et* B *sont simultanément vraies ou simultanément fausses.*

Voici les tables de vérités :

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Exercice 1.14. Vérifier que $A \Rightarrow B$ est la même assertion que $\overline{A} \vee B$.

Remarque 1.15. Il peut sembler bizarre qu'une assertion fausse puisse impliquer une assertion vraie. Ce qu'il faut retenir est que la seule possibilité pour que l'implication $A \Rightarrow B$ soit fausse est lorsque A est vraie et B est fausse : **"le vrai n'implique pas le faux"**.

Exercice 1.16. Dans les cas suivant, dire si l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie :

1. $x \in \mathbb{N} \Rightarrow (x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0)$.
2. $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0)$.
3. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x = y^2$.

Proposition 1.17 (Loi de Morgan)**.** *Soit* A *et* B *deux assertions.*

1. $(\overline{A \vee B}) = \overline{A} \wedge \overline{B}$.
2. $(\overline{A \wedge B}) = \overline{A} \vee \overline{B}$.

Définition 1.18. *Soit* A *et* B *deux assertions.*

1. *La* ***contraposée*** *de* $A \Rightarrow B$ *est* $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.
2. *La* ***réciproque*** *de* $A \Rightarrow B$ *est* $B \Rightarrow A$.

Proposition 1.19. *Une implication est équivalente à sa contraposée.*

Ceci peut se concevoir dans des exemples de la vie courante. Prenons l'exemple d'un individu très précautionneux : dès qu'il pleut, il prend son parapluie. Logiquement, on le résume à « Pluie $\Rightarrow$ Parapluie ». Si on croise cet individu et qu'il est sans son parapluie, alors c'est qu'il ne pleut pas : $\overline{\text{Parapluie}} \Rightarrow \overline{\text{Pluie}}$.

Par contre, il est possible qu'il ait pris son parapluie sans qu'il pleuve, mettons par anticipation. Donc, ce n'est pas parce que « Pluie $\Rightarrow$ Parapluie » est vraie que « Parapluie $\Rightarrow$ Pluie » est vraie.

Exercice 1.20. Décrire les contraposées et les réciproques des implications de l'exercice 1.16 et dire si elles sont vraies ou fausses.

1.4 Raisonnement par récurrence

Le but du raisonnement par récurrence est de démontrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$, est vraie pour tout $n \geq n_0$ pour un certains $n_0 \in \mathbb{N}$.

On procède en deux étapes :

1. **Initialisation :** on démontre que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité :** On suppose que $P(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et on montre que cela implique que $P(k+1)$ est vraie.

Cela suffit à démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. En effet, comme la propriété $P(n_0)$ est vraie, alors la propriété $P(n_0+1)$ est vraie par hérédité. Mais cette même propriété d'hérédité implique alors que la propriété $P(n_0+2)$ est vraie, donc la propriété $P(n_0+3)$ aussi et ainsi de suite. Ainsi, on obtient de proche en proche que, pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

On utilise souvent l'image suivante pour illustrer la récurrence. Imaginons une ligne infinie de dominos mis debout. L'initialisation est l'analogue de l'évènement "le premier domino de la ligne tombe" et l'hérédité est le principe "si un domino tombe, alors le suivant tombe aussi". Si ces deux principes sont vérifiés, on peut être sûr que tous les dominos de la ligne vont tomber.

Exemple 1.21. *Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, nus allons montrer par récurrence la propriété $P(n)$ suivante :*

$$P(n) \ : \ 0+1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

Initialisation : *Pour $n=0$, on a $0 = \frac{0(0+1)}{2}$. Donc $P(0)$ est vraie.*

Hérédité : *Supposons la propriété $P(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Le but est de montrer $P(n+1)$.*

Par hypothèse, nous avons

$$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rajoutons $n+1$ aux deux membres de cette égalité. Nous obtenons alors

$$1+2+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ .$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie dès que $P(n)$ est vraie.

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, et comme $P(0)$ est vraie, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.5 Exercices supplémentaires

Exercice 1.22. Soit A et B deux ensembles. Montrer l'égalité

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \ .$$

Exercice 1.23. Soit A et B deux assertions. Montrer les équivalences suivantes

1. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
2. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \vee \overline{A})$.
3. $\overline{(A \Rightarrow B)} \Leftrightarrow (\overline{B} \wedge A)$.

Exercice 1.24. Démontrer la Proposition 1.4 et la Proposition 1.19.

Exercice 1.25. Soit A, B, C trois ensembles, $f : A \to B$ et $f : B \to C$ deux applications. On définit $g \circ f : A \to C$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Montrer que

1. f injective $\Rightarrow (g \circ f$ injective.
2. g surjective $\Rightarrow (g \circ f)$ surjective.

Chapitre 2

Calculs dans l'ensemble des nombres réels

2.1 Fractions

Exercice 2.1. Calculer et écrire sous forme irréductible :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{7}-\frac{1}{5}, \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{6}, \quad \frac{2}{\frac{5}{6}}, \quad \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}, \quad \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}},$$

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}, \quad \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}, \quad \frac{10}{x}-\frac{7}{2x}, \quad \frac{1+x}{2-x}+\frac{5}{2-x}, \qquad \frac{1+x}{2-x}+\frac{1}{1-x}.$$

2.2 Inégalités dans $\mathbb{R}$

2.2.1 Intervalles

Définition 2.2. *On appelle* intervalle fermé *de* $\mathbb{R}$ *tout sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *de l'une des formes suivantes.*

$$[a;b]=\{x\in\mathbb{R} : a\leq x\leq b\},\ [a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R} : a\leq x\},\ ]-\infty;a]=\{x\in\mathbb{R} : x\leq a\},\ \mathbb{R} \text{ ou } \emptyset,$$

où $a<b$ sont des nombres réels. On appelle intervalle ouvert *de* $\mathbb{R}$ *tout sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *de l'une des formes suivantes.*

$$]a;b[=\{x\in\mathbb{R} : a<x<b\},\ ]a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R} : a<x\},\ ]-\infty;a[=\{x\in\mathbb{R} : x<a\},\ \mathbb{R} \text{ ou } \emptyset,$$

où $a<b$ sont des nombres réels. Enfin, on appelle intervalle *de* $\mathbb{R}$ *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *qui est un intervalle ouvert, un intervalle fermé ou un ensemble de l'une des formes suivantes*

$$[a;b[=\{x\in\mathbb{R} : a\leq x<b\},\ ]a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a<x\leq b\},$$

où $a<b$ sont des nombres réels.

Exercice 2.3. Écrire sous forme d'intervalle (ou de réunion d'intervalles) les sous ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

1. $A=\{x\in\mathbb{R},\ -1<x\leq\sqrt{2}\}$
2. $B=\{x\in\mathbb{R},\ 2\leq x<5 \text{ et } 6\leq x<7\}$
3. $C=]-5,\pi]\cap[2,18[$
4. $D=\{x\in\mathbb{R},\ x^2\leq 4\}$
5. $E=\{x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 9\}$

2.2.2 Règles de calcul sur les inégalités

1. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$,
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall k > 0$, si $a < b$, alors $ka < kb$,
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall k < 0$, si $a < b$, alors $ka > kb$,
4. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $0 \leq a < b$ et $0 \leq c < d$, alors $0 \leq ac < bd$,
5. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $a < b \leq 0$ et $c < d \leq 0$, alors $0 \leq bd < ac$.
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$).
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$).

Exercice 2.4. Dans chacun des cas suivants, déterminer **sans calculatrice** lequel des deux nombres proposés est le plus grand.

1. $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{3}$.
2. $\frac{7}{12}$ et $\frac{5}{7}$.
3. $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
4. $\sqrt{3}$ et 2.
5. $2 + \sqrt{3}$ et 4.
6. $\sqrt{2}$ et $\frac{3}{2}$.
7. $\sqrt{5}$ et $\frac{7}{3}$.
8. $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$ et 3.
9. $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$ et $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$.

Exercice 2.5. Encadrer :

1. $\frac{x+1}{2x+3}$ pour $x \in [0, 2]$.
2. $\sqrt{2x+1}$ pour $x \in [1, 2]$
3. $\frac{1}{4x+5}$ pour $x \in [-1, 5]$
4. $\frac{x+1}{2x+2}$ pour $x \in [0, 2]$
5. $(x + 2)(x - 10)$ pour $x \in [3, 5]$
6. $\frac{x+2}{x-10}$ pour $x \in [3, 5]$
7. $x^2 - 8x - 20$ pour $x \in [3, 5]$.
8. $(5x + 3)^2$ pour $x \in [0, 2]$ puis pour $x \in [-1, 1]$

2.2.3 La valeur absolue

Sur $\mathbb{R}$, on appelle valeur absolue l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{rcll} |\, x \,| & = & x & \text{si } x \geq 0 \\ |\, x \,| & = & -x & \text{si } x < 0 \end{array}.$$

Ainsi, si a et b sont deux nombres réels, $|a - b|$ représente la distance entre a et b sur l'axe réel.

2.2.4 Majorants et minorants

Définition 2.6. *Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dira que E est* **majoré** *(respectivement* **minoré***) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que pour tout $x \in E$ on ait $x \leq M$ (resp. $x \geq m$).*
Un élément M vérifiant la propriété ci dessus s'appelle un majorant de E (resp. m s'appelle un minorant de E).
Un ensemble qui est à la fois majoré et minoré est dit **borné***.*

Exemple 2.7. *L'intervalle $A =]-\infty, 1[$ est majoré, mais il n'est pas minoré. Les nombres 5, π, 2, 1 sont des majorants de A. Il en existe une infinité d'autres. L'ensemble A ne possède aucun minorant.*

Définition 2.8. *Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dira que E possède un maximum s'il existe $M \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \leq M$. On dira que E possède un minimum s'il existe $m \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \geq m$.*

ATTENTION : La différence fondamentale entre cette définition et la précédente porte sur le fait que le majorant M appartient ou pas à l'ensemble E. Par exemple, l'ensemble $A = [0, 1]$ possède un maximum et un minimum : $\max(A) = 1$ et $\min(A) = 0$. Par contre, l'ensemble $B = [0, 1[$ n'a pas de maximum (bien qu'il soit borné).

Exercice 2.9. Parmi les ensembles suivant, dire lesquels possèdent un majorant, un minorant, un maximum ou un minimum.

1. $A = \left\{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
2. $B =]-1; 12]$
3. $C = \mathbb{Q} \cap [\pi, 17/3]$.

2.3 Équations du premier et second degré dans $\mathbb{R}$

2.3.1 Premier degré

Exercice 2.10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x + 1 = 3x + 5$.
2. $2x + 4 = 2x + 5$.
3. $12x - 3 = 7$.

2.3.2 Identités remarquables

Développer une expression, c'est l'écrire sous forme d'une somme. **Factoriser** une expression, c'est l'écrire sous forme d'un produit.

Pour développer ou factoriser une expression, on utilise les formules suivantes.

Proposition 2.11. *Soient k, a et b des nombres réels. On a les égalités suivantes.*

1. $k(a + b) = (a + b)k = ka + kb$.
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
4. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Exemple 2.12. *Pour développer l'expression $(2x + 3)(x - 1)$, on utilise la première règle ci-dessus :*

$$(2x + 3)(x - 1) = (2x + 3)x + (2x + 3)(-1) = 2x^2 + 3x - 2x - 3 = 2x^2 + x - 3.$$

Pour développer l'expression $(2x + 3)^2$, on peut utiliser la deuxième formule ci-dessus

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2.3.2x + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9.$$

Exercice 2.13. Développer les expressions suivantes, où a, b, x et y désignent des nombres réels.

1. $5(x + 2)$
2. $\dfrac{b}{3}(x + 3)$
3. $(y + 3)(x + 1)$
4. $(10x + 1)^2$
5. $\dfrac{1}{5}(5y - 3)^2$
6. $(y - 1)(x + 1)(x - 1)$
7. $(y - 1)(x + 1)^2$
8. $(a + b)^3$

Exemple 2.14. *On va utiliser les mêmes formules (dans l'autre sens) pour factoriser des expressions. Par exemple, pour factoriser l'expression $10x^2 - 10$, on utilise, la première puis la dernière règle : $10x^2 - 10 = 10(x^2 - 1) = 10(x^2 - 1^2) = 10(x - 1)(x + 1)$.*

Exercice 2.15. Factoriser les expressions suivantes en utilisant les formules de la proposition 2.11.

1. $x^2 + 2x$
2. $x^2 - 4$
3. $x^2 - 2x + 1$
4. $\frac{1}{25}x^2 - \frac{1}{9}$
5. $xy^2 - 4x$
6. $10x^2 + 20x + 10$

2.3.3 Forme canonique d'un polynôme de degré 2

On appelle polynôme (réel) de degré 2 toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$, où a est un nombre réel non-nul et b et c sont des nombres réels. Écrire un tel polynôme sous forme canonique, c'est trouver des nombres réels λ, α et β de sorte que

$$ax^2 + bx + c = \lambda((x-\alpha)^2 - \beta).$$

Dans le cas où $\beta \geq 0$, la forme canonique permet de factoriser le polynôme. En effet, si $\beta \geq 0$,

$$\lambda((x-\alpha)^2 - \beta) = \lambda((x-\alpha)^2 - (\sqrt{\beta})^2) = \lambda(x - \alpha + \sqrt{\beta})(x - \alpha - \sqrt{\beta}).$$

Exemple 2.16. *Mettons le polynôme $-3x^2 + 6x + 3$ sous forme canonique. On commence par factoriser par le coefficient dominant -3 :*

$$-3x^2 + 6x + 3 = -3(x^2 - 2x - 1).$$

Ensuite on interprète le terme $-2x$ comme le double produit d'une identité remarquable que l'on fait apparaître (en ajoutant et en enlevant 1^2 dans l'exemple).

$$\begin{aligned} -3(x^2 - 2x - 1) &= -3(x^2 - 2.1.x + 1^2 - 1^2 - 1) \\ &= -3(x^2 - 2.1.x + 1^2 - 2) \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ pour obtenir la forme canonique du polynôme.

$$-3(x^2 - 2.1.x + 1^2 - 2) = -3((x-1)^2 - 2).$$

Enfin, on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ pour factoriser le polynôme

$$\begin{aligned} -3((x-1)^2 - 2) &= -3((x-1)^2 - (\sqrt{2})^2) \\ &= -3(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Au final, on obtient une factorisation du polynôme

$$-3x^2 + 6x + 3 = -3(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}).$$

Exemple 2.17. *Avec la même méthode, nous allons mettre le polynôme $x^2 + 4x + 6$ sous forme canonique.*

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 6 &= x^2 + 2.2.x + 2^2 - 2^2 + 6 \\ &= x^2 + 2.2.x + 2^2 + 2 \\ &= (x+2)^2 + 2. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on n'obtient pas une différence entre deux carrés de réels. On ne peut pas factoriser comme dans le premier exemple.

Exercice 2.18. Écrire sous forme canonique les polynômes de degré 2 suivants. Si possible, factoriser ces polynômes.

1. $x^2 + 6x - 16$
2. $x^2 - 2x + 2$
3. $x^2 - 8x + 16$
4. $5x^2 - 30x + 45$
5. $10x^2 + 10x + 10$
6. $2x^2 + 9x + 4$

2.3.4 Équations du second degré

La méthode générale pour résoudre une équation algébrique du second degré est de la réécrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, puis de mettre $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique. Ensuite, si l'on peut factoriser $ax^2 + bx + c$, on peut utiliser la propriété suivante pour se ramener à des équations de degré 1.

Proposition 2.19. *Un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.*

Exemple 2.20. *On veut résoudre l'équation $-2x^2 + 3x + 6 = x^2 - 3x + 3$. En regroupant tout dans le membre de gauche, c'est-à-dire en enlevant $x^2 - 3x + 3$ aux deux membres de l'équation, l'équation se réécrit*

$$-3x^2 + 6x + 3 = 0.$$

En utilisant la factorisation du membre de gauche vue dans l'exemple 2.16, l'équation se réécrit

$$-3(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) = 0.$$

Enfin, d'après la proposition 2.19, cette équation est vérifiée si et seulement si

$$x - 1 - \sqrt{2} = 0 \text{ ou } x - 1 + \sqrt{2} = 0$$

c'est-à-dire

$$x = 1 + \sqrt{2} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right\}.$$

Exemple 2.21. *Ici, on veut résoudre l'équation $x^2 + 4x + 6 = 0$. En utilisant la forme canonique obtenue dans l'exemple 2.17, l'équation se réécrit*

$$(x + 2)^2 + 2 = 0.$$

Mais, pour tout nombre réel x, le nombre réel $(x + 2)^2$ est positif car c'est un carré. Ainsi, le nombre $(x + 2)^2 + 2$ est strictement positif donc l'équation n'a pas de solution.

Exercice 2.22. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(x - 1)(x + 3) = 0$.
2. $3x^2 + 6x + 9 = 0$.
3. $x^2 - 2x = 4$.
4. $x^2 + 4x + 1 = -1$.
5. $2x^2 + 12x + 20 = 0$.
6. $(x - 1)(x^2 + 2x + 1) = 0$.

2.4 Exercices supplémentaires

Exercice 2.23. Soit x, y tels que $-4 < x < -2$ et $8 < y < 10$. Donnez un encadrement de $x - y$, xy et de $-\sqrt{x^2}$.

Exercice 2.24. Vrai ou faux ?

1. Pour que $x^2 > 10000$, il suffit que $x > 100$.
2. Pour que $x^2 > 10000$, il faut que $x > 100$.
3. Pour que $x > 100$, il suffit que $x^2 > 10000$.
4. Pour que $x > 100$, il faut que $x^2 > 10000$.
5. Pour que $\frac{1}{x} > 100$, il suffit que $x < 10^{-2}$.

6. Pour que $5x^2 + \frac{10}{x} > 100$, il suffit que $x < -5$.
7. Pour que $5x^2 + \frac{10}{x} > 100$, il faut que $x < -5$.
8. Soient a et b deux réels. Pour que $a + b < 1$, il faut que $a < \frac{1}{2}$ et $b < \frac{1}{2}$.
9. L'ensemble des réels x tels que $\frac{1}{x} < 1$ est l'intervalle $]1, +\infty[$.
10. Pour tout entier naturel n, l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x} > 10^n$ est l'intervalle $]10^{2n}, +\infty[$.

Exercice 2.25. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $|x - 2| \leq 3$
2. $|3 - x| \leq 4$
3. $|x - 1| \leq -\sqrt{2}$
4. $\mid x - 5 \mid + \mid x + 1 \mid < 8$

Exercice 2.26. Dans chacun des cas suivants, dites si l'ensemble considéré est majoré, minoré. Déterminez si l'ensemble possède un maximum, un minimum.

$$E_1 =]0, 1], \; E_2 = \mathbb{N}, \; E_3 = [0, +\infty[, E_4 = \{x \in \mathbb{Q}, \; x^2 \leq 2\}.$$

Exercice 2.27. Montrer que $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ et que $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$. En déduire une formule analogue pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 2.28. Soient $a \neq 0$, b et c des nombres réels. Mettre le polynôme $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique. En déduire l'ensemble des solutions réelles de l'équation, d'inconnue x, $ax^2 + bx + c = 0$ et retrouver les formules vues dans le secondaire.

Exercice 2.29. Déterminer dans chacun des cas suivants l'ensemble des nombres réels x qui vérifient la relation proposée.

1. $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.
2. $x^4 + 10x^2 + 16 = 0$.
3. $x^4 + 4x^2 - 5 \geq 0$.
4. $x^4 + 10x^2 + 16 < 0$.
5. $(x^2 + 4x - 3)(x^2 + 5x + 19) = 0$.

Exercice 2.30.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + ax + b)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 = 1$.
3. Déterminer deux réels a et b tels que $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x^2 + ax + b)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 2x^2 - 5x = 6$.

Chapitre 3

Dénombrement

Rappelons que pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par $n!$ la « factorielle de n », qui est définie par $n! = n. \ldots .2.1$ si $n \geq 1$ et $0! = 1$ par convention.

Exercice 3.1.

1. Montrer que $6! \times 7! = 10!$ (sans calculer $10!$).
2. Simplifier $\dfrac{(n+1)!}{n!}$.

3.1 Généralités

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini E, noté $\mathrm{Card}(E)$, est son nombre d'éléments.
Par exemple, nous avons $\mathrm{Card}\left(\llbracket 0, 10 \rrbracket\right) = 11$.

Définition 3.2. *Soit E un ensemble fini, et soient $A_1, \ldots, A_k \subset E$ des parties de E. On dit que $A_1, \ldots, A_k$ forment une **partition** de E si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\forall i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $E = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

Proposition 3.3 (Principe de la somme)**.** *Si des sous-ensembles $A_1, \ldots, A_k$ forment une partition d'un ensemble fini E, alors*

$$\mathrm{Card}(E) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Card}(A_i).$$

Corollaire 3.4. *Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. On a les relations suivantes.*

1. $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.
2. *Si A et B sont disjoints (c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$), alors on a* $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.
3. $\mathrm{Card}(A^c) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$.

Exercice 3.5. Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis, et 16 ne pratiquent aucun de ces deux sports. Combien de personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation ?

Définition 3.6. *Soient $E_1, \ldots, E_k$ des ensembles finis. On appelle **produit cartésien** de $E_1, \ldots, E_k$, et on note $E_1 \times \cdots \times E_k$, l'ensemble des k-uplets $(x_1, \ldots, x_k)$, où $x_1 \in E_1$, …, $x_k \in E_k$. Autrement écrit,*

$$E_1 \times \cdots \times E_k = \left\{(x_1, \ldots, x_k),\ x_1 \in E_1, \ldots,\ x_k \in E_k\right\}.$$

Proposition 3.7. *Soient $E_1, \ldots, E_k$ des ensembles finis. Alors,*

$$\mathrm{Card}(E_1 \times \cdots \times E_k) = \mathrm{Card}(E_1) \ldots \mathrm{Card}(E_k).$$

3.2 Listes et nombre d'arrangements

Définition 3.8. *Soit E un ensemble fini et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une **k-liste** de E est un élément de $E^k = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}}$.*

Concrètement, une k-liste est la donnée de k éléments de E qu'on écrit les uns à la suite des autres $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, <u>en tenant compte de l'ordre</u>.

Remarque 3.9. Une 0-liste est par convention la liste vide.

Exemple 3.10. *Si $E = [\![0, 9]\!] = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, alors*
- $(3, 8, 2, 8, 6)$ *est une* 5*-liste de* E.
- $(4, 3, 5, 6)$ *est une* 4*-liste de* E.
- $(1, 2, 3)$ *et* $(2, 3, 1)$ *sont deux* 3*-listes* ***distinctes*** *de* E : $(1, 2, 3) \neq (2, 3, 1)$.

Remarque 3.11. On autorise une k-liste à répéter plusieurs fois le même élément. Dans l'exemple précédent, 8 est répété deux fois dans la première 5-liste. On précise parfois qu'il s'agit de liste « avec répétition », pour les distinguer des arrangements définis ci-dessous.

Proposition 3.12. *Soit E un ensemble fini et soit $n = \mathrm{Card}(E)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors E^k est fini, et $\mathrm{Card}(E^k) = n^k = \mathrm{Card}(E)^k$.*

Définition 3.13. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![0, n]\!]$. On appelle **arrangement de** k **éléments** de E une k-liste de E formée d'éléments deux à deux distincts. Un arrangement de n éléments est appelé une **permutation** de E.*

Un arrangement de k éléments est donc une k-liste *sans répétition*. Cela revient à se donner k éléments distincts de E et à les ranger dans un certain ordre.

Exemple 3.14. *Soit $E = \{a, b, c, \ldots, z\}$ l'alphabet latin. Alors*
- *La* 5*-liste* (a, z, u, r, e) *est un arrangement de* E.
- *La* 7*-liste* (l, a, p, l, a, c, e) *n'est pas un arrangement de* E.
- *La* 26*-liste* $(z, y, x, \ldots, c, b, a)$ *est une permutation de* E.

Théorème 3.15. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors,*
- *Le nombre d'arrangement de k éléments de E est donné par*

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- *Le nombre de permutations de E est $A_n^n = n!$.*

Remarque 3.16. On rappelle la convention $0! = 1$.

Remarque 3.17. On note que $A_n^0 = 1$, ce qui est cohérent avec le fait qu'il n'existe qu'un seul arrangement à zéro élément : la liste vide.

Exercice 3.18. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n^{n-1} = A_n^n = n!$. Interprétation.

Exercice 3.19. Un mot est une liste de lettre sur l'alphabet. Un *anagramme* d'un mot est un mot obtenu par permutation de ses lettres. Pour chacun des mots suivants, déterminer leur nombre d'anagramme.

1. maths
2. mime
3. ananas

3.3 Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

Théorème 3.20. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors, le nombre de sous-ensembles à k éléments de E est donné par*

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque 3.21. Bien que défini sous la forme d'une fraction d'entiers, $\binom{n}{k}$ est un entier.

On retiendra bien que $\binom{n}{k}$ est le nombre de façon de choisir k éléments parmi un ensemble à n éléments, sans tenir compte de l'ordre.

Exemple 3.22.
1. *Au loto, on tire au hasard* 5 *boules parmi* 49*, puis* 1 *boule parmi* 10.[1] *Il y a donc* $10 \times \binom{49}{5}$ *tirages possibles, soit* 19068840. *possibilités.*

Exercice 3.23. À la belote, on reçoit au premier tour 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Démontrer qu'il y a 201376 mains possibles au total.
2. Démontrer qu'il y a 1540 mains qui contiennent *au moins* 3 as. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 as au premier tour ?

Exercice 3.24. Une main au poker est formée de 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes. Traditionnellement,trèfle, carreau, coeur, pique sont appelées couleurs et les valeurs des cartes sont rangées dans l'ordre : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, de la plus forte à la plus faible. Dans chacun des cas suivants, donner le nombre de possibilité de mains :

1. quinte flush : main formée de 5 cartes consécutives de la même couleur (Attention ! la suite as, 2, 3, 4 et 5 est une quinte flush).
2. carré : main contenant 4 cartes de la même valeur (4 as par exemple).
3. full : main formée de 3 cartes de la même valeur et de deux autres cartes de même valeur (par exemple, 3 as et 2 rois).
4. quinte : main formée de 5 cartes consécutives et qui ne sont pas toutes de la même couleur.
5. brelan : main comprenant 3 cartes de même valeur et qui n'est ni un carré, ni un full (par exemple, 3 as, 1 valet, 1 dix).

Théorème 3.25. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux nombres réels et soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

*C'est la formule du **binôme de Newton**.*

Exercice 3.26. Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. En déduire le nombre de parties d'un ensemble fini à n éléments.

Proposition 3.27. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Ceci s'interprète aussi bien à l'aide de la formule donnant $\binom{n}{k}$, qu'à l'aide de la définition.

1. Cette règle date de 2008. De 1976 à 2008, la grille de loto consistait en un tirage de 6 boules parmi 49, soit un peu moins de 14 millions de possibilités.

Proposition 3.28. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

*C'est la **relation de Pascal**.*

Cette relation permet de remplir progressivement le triangle de Pascal comme sur la figure ci-dessous.

	0	1	2	3	4	$\cdots$	$k-1$	k	$\cdots$	$n-1$	n
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
$\vdots$						$\ddots$					
$k-1$							1				
k								1			
$\vdots$									$\ddots$		
$n-1$	1	$n-1$					$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$		1	
n	1	n						$\binom{n}{k}$		n	1

Exercice 3.29. Déterminer la 7ème ligne du triangle de Pascal.

3.4 Exercices supplémentaires

Exercice 3.30. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)! - k! = k.k!$.

En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n! = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} k.k!$$

Exercice 3.31. Combien y a-t-il de numéro de téléphone français qui commencent par 04 89 ?

Exercice 3.32. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{2} = 1 + 2 + \cdots + n - 1$.

Exercice 3.33. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$

Exercice 3.34. Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard, ce qu'on appelle « une main ».

1. Combien de mains contiennent 5 carreaux ou 5 pique ?
2. Combien de mains contiennent 2 carreaux et 3 piques ?
3. Combien de mains contiennent au moins un roi ?
4. Combien de mains contiennent au plus un roi ?
5. Combien de mains exactement 2 rois et exactement 3 piques ?

Exercice 3.35. On appelle *diagonale* d'un polygone tout segment joignant deux sommets et qui n'est pas un côté du polygone.

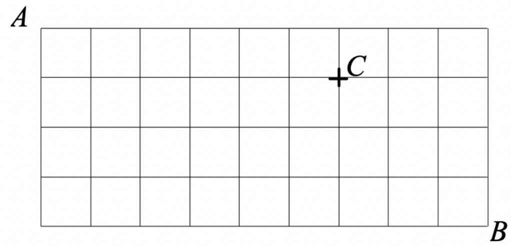


FIGURE 3.1 – Exercice 3.38

1. Combien y a-t-il de diagonales dans un polygone à n sommets ?
2. Quels polygones ont autant de côtés que de diagonales ?
3. Quels polygones admettent exactement 1325 diagonales ?

Exercice 3.36. On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières.
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Exercice 3.37. Une table ronde comporte cinq places, numérotées de 1 à 5. On veut répartir Anushka, Bianca, Charif, Derick et Émilie autour de la table. Mais, Derick et Émilie ne s'entendent pas du tout, et il ne faut pas les placer côte à côte. Combien y-a-t-il de dispositions possibles ?

Exercice 3.38.

1. Dans le quadrillage de la Figure 3.1, combien y a-t-il de chemins qui mènent de A à B ? (seuls les déplacements vers la **D**roite et vers le **B**as sont autorisés) *Indication : On pourra dénombrer le nombre de mots de* 13 *lettres qui contiennent* 9 *fois la lettre D et* 4 *fois la lettre B*.
2. Combien de ces chemins passent par le point C ?

Chapitre 4

Suites

4.1 Suites

Une **suite numérique** est une application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & x_n \end{array} .$$

Nous noterons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite.

Définition 4.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est*

1. ***arithmétique** si il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$x_{n+1} = x_n + r .$$

2. ***Géométrique** si il existe un réel r non nul tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$x_{n+1} = rx_n .$$

*Dans les deux cas, le réel r est appelé la **raison** de la suite.*

Exemple 4.2.
1. *L'ouverture d'une ligne internet coûte 50€, puis l'abonnement est de 20€ par mois. Si l'on note x_n le prix total payé (en euros) après n mois d'abonnement, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 20.*
2. *Le prix d'une baguette de pain augmente de 5% par an. Si l'on note y_n le prix d'une baguette l'année n, alors la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 1,05.*

Proposition 4.3. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $n_0 \in \mathbb{N}$ un entier fixé.*

1. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a*

$$x_{n_0+k} = x_{n_0} + kr .$$

2. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a*

$$x_{n_0+k} = q^k x_{n_0} .$$

Exercice 4.4. Considérons les données de l'Exemple 4.2.

Au bout de combien de mois aura-t-on payé 1000€ pour internet ?

Sachant qu'en 2010 une baguette coûtait 1€, en quelle année la baguette coûtera 2€ ? 5€ ?

4.2 Symboles $\sum$, $\prod$ et factorielle

Notons $n_0 \leq n_1$ des entiers relatifs et $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_1}$ des nombres réels. On note

$$\sum_{i=n_0}^{n_1} x_i = x_{n_0} + x_{n_0+1} + \ldots + x_{n_1}.$$

Par exemple, $\sum_{i=0}^{3} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$.
Noter que le i qui apparait dans la formule ci-dessus est une variable muette : on aurait pu la remplacer par n'importe quelle autre lettre. Par exemple

$$\sum_{k=0}^{3} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = \sum_{i=0}^{3} i^2.$$

Par convention, une somme vide est égale à 0. Par exemple $\sum_{k=0}^{-1} k = 0$, puisqu'il n'y a pas d'indice k plus grand que 0 et plus petit que -1.

Exercice 4.5. (i) Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{4} i, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{3} k, \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{10} 1, \qquad S_4 = \sum_{i=1}^{n} 3, \qquad S_5 = \sum_{i=-2}^{3} (i+2), \qquad S_6 = \sum_{i=0}^{3} (i+1)^2.$$

(ii) Ecrire les additions suivantes en utilisant le symbole $\sum$ (sans les calculer) :
$S = 100 + 101 + 102 + \ldots + 199 + 200$, $T = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{55} + \frac{1}{60}$
$R = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 38 + 40$, $U = 3 + 9 + 15 + 21 + \ldots + 39 + 45$

(iii) Voici une table de données statistiques :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	-1	5	2	-2	5	2	1	3	4

Calculer :

$$T_1 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2, \qquad T_2 = \sum_{i=1}^{10} i x_i, \qquad T_3 = \sum_{i=1}^{5} 2x_{2i}.$$

Soient $n_0 \leq n$ des entiers relatifs et $u_{n_0}, u_{n_0+1}, \ldots, u_n$ des nombres réels. Les sommes de la forme $\sum_{k=n_0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$ sont dites télescopiques. En effet, si l'on écrit cette somme en extension, tous les termes se simplifient sauf u_{n+1} et u_{n_0}.

Par exemple,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{7} (\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) + (\sqrt{8} - \sqrt{7}) \\
&= -\sqrt{2} + (\sqrt{3} - \sqrt{3}) + (\sqrt{4} + -\sqrt{4}) + (\sqrt{5} - \sqrt{5}) + (\sqrt{6} - \sqrt{6}) + (\sqrt{7} - \sqrt{7}) + \sqrt{8}.
\end{aligned}$$

Finalement $\sum_{i=2}^{7} (\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) = \sqrt{8} - \sqrt{2}$.

Exercice 4.6. Calculer les sommes téléscopiques A et B suivantes :

$$A = \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right), \qquad B = \sum_{k=1}^{99} \left[(k+1)^3 - k^3 \right].$$

La notation $\prod$ est l'équivalent de la notation $\sum$ pour les produits. Notons $n_0 \leq n_1$ des entiers relatifs et $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_1}$ des nombres réels. On note

$$\prod_{i=n_0}^{n_1} x_i = x_{n_0} \times x_{n_0+1} \times \ldots \times x_{n_1}.$$

Par exemple, $\prod_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 \times 2^2 \times 3^2$. Par convention, un produit vide est égal à 1.

Enfin , pour un entier n, on appelle factorielle n et on note $n!$ le nombre

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Par exemple, on a $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. D'après la convention sur le produit vide, on a $0! = 1$.

Exercice 4.7. Calculer les produits suivants :

$$A = \prod_{i=1}^{3} (2i), \qquad B = 4!, \qquad C = 5!, \qquad D = \frac{5!}{4!}, \qquad E = \frac{4!}{5!}, \qquad F = \prod_{k=1}^{11} \frac{k+2}{k+3}, \qquad G = \prod_{k=1}^{3} \left(1 + \frac{1}{k} \right).$$

4.3 Somme d'une suite arithmétique et géométrique

Proposition 4.8. *1. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Si q est un réel différent de 1, alors

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exercice 4.9. Démontrer les formules précédentes.

Exercice 4.10. Calculer les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=20}^{100} (k+1), \; S_2 = \sum_{k=1}^{100} (5k+3), \; S_3 = \sum_{k=20}^{100} \left(\frac{1}{2} \right)^k, \; S_4 = \sum_{k=1}^{100} 5 \times 10^k, \; S_5 = \sum_{k=1}^{20} (2 \times 2^k + 3k + 4).$$

Chapitre 5

Géométrie dans le plan

5.1 Vecteurs du plan

L'ensemble des vecteurs du plan est noté

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^2\} .$$

Étant donné deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ du plan, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \in \mathbb{R}^2 .$$

En particulier, nous pouvons identifier les points du plans avec les vecteurs du plan via l'application $M \mapsto \overrightarrow{OM}$, où $O(0, 0)$ est l'origine du plan.

Il y a deux opérations fondamentales sur les vecteurs :

— **La somme :** étant donné deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, on définit la somme

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \in \mathbb{R}^2 .$$

— **La multiplication par un scalaire :** étant donné un vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ dans $\mathbb{R}^2$ et un nombre réel λ (appelé **scalaire**), on définit

$$\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2) \in \mathbb{R}^2 .$$

Exercice 5.1. Considérons les vecteurs $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 4)$ et $\vec{w} = (0, 1)$.

1. Représenter les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sur le plan.
2. Calculer les vecteurs
$$\vec{u} + \vec{v} \quad , \quad 3\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w} \quad , \quad -\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w} .$$

Exercice 5.2. Soit A, B et C trois points du plan. Montrer les égalités suivantes

1. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ..

Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$, une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur $\vec{w}$ de la forme

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ pour certains } \lambda, \mu \in \mathbb{R} .$$

Les deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sont

— **orthogonaux** si $u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$,

— **colinéaires** si $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Finalement, la **norme** de $\vec{u}$ est définie par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \in \mathbb{R} .$$

Définition 5.3.
— *Une **base** de $\mathbb{R}^2$ est une paire $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs telle que tout vecteur $\vec{w}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. C'est à dire*

$$\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^2 \ , \ \exists! \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} .$$

*La paire (λ, μ) est appelée **coordonnées du vecteur** $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.*

— *Un **repère** du plan est un triplet $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où Ω est un point du plan et $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En particulier, pour tout point M du plan, il existe une unique paire (λ, μ) de réels telle que*

$$\overrightarrow{\Omega M} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} .$$

*La paire (λ, μ) est appelée **coordonnées du point** M dans le repère (Ω, A, B).*

Exemple 5.4.
1. *Pour $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$, la paire $(\vec{i}, \vec{j})$ est appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^2$: c'est en utilisant cette base que les coordonnées d'un vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ sont (u_1, u_2).*
2. *De même, le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est le repère canonique : c'est dans ce repère que les coordonnées de $M(x, y)$ sont (x, y).*

Exercice 5.5. Dans les cas suivant, dire si la paire $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteur est colinéaire, orthogonale, ou forme une base de $\mathbb{R}^2$.

1. $\vec{u} = (1, 0)$ et $\vec{v} = (0, 1)$.
2. $\vec{u} = (3, 2)$ et $\vec{v} = (-1, 4)$.
3. $\vec{u} = (5, 5)$ et $\vec{v} = (1, 1)$.
4. $\vec{u} = (2, 3)$ et $\vec{v} = (-3, 2)$.
5. $\vec{u} = (6, 2)$ et $\vec{v} = (-3, -1)$.
6. $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
7. $\vec{u} = (0, 0)$ et $\vec{v} = (0, -4)$.

Dans les cas où $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base, donner les coordonnées du vecteur $\vec{w} = (4, 1)$.

Proposition 5.6. *Soit $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ deux vecteurs d plan.*

1. *La paire $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base si et seulement si $u_1 v_2 - v_1 u_2 \neq 0$.*
2. *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$.*

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathbb{R}^2$ où $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$. On dit que la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est

1. **Orthonormée** si la paire $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthogonale et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$.
2. **Directe** si $u_1 v_2 - u_2 v_1 > 0$.
3. **Indirecte** si $u_1 v_2 - u_2 v_1 < 0$.

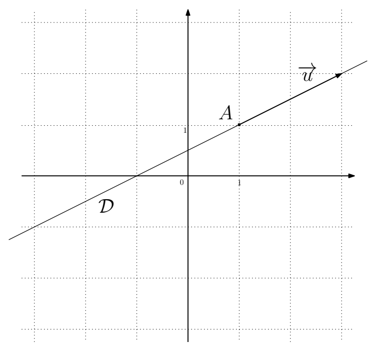
Exercice 5.7. Dans les bases de l'Exemple 5.5, dire si elles sont orthonormées, directes ou indirectes.

5.2 Droites du plan

5.2.1 Définition

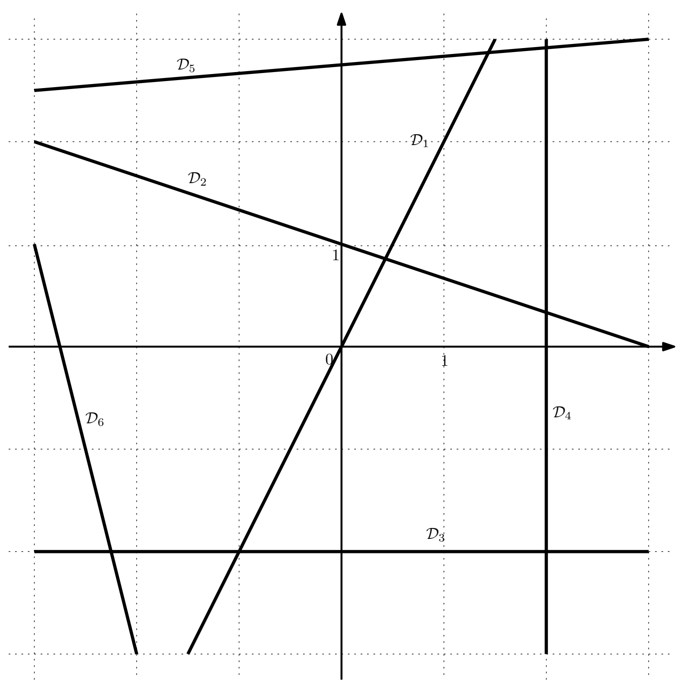
Définition 5.8. *Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul. La droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.*

Sur la figure suivante, on a représenté la droite passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (2,1)$.



Remarquons que le vecteur directeur d'une droite n'est pas unique, mais que deux vecteurs directeurs sont colinéaires.

Exercice 5.9. Pour chacune des droites suivantes $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_5$ et $\mathcal{D}_6$, déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de la droite.



Sur le même dessin, tracer la droite passant par le point $A(-1,1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,-1)$ et la droite passant par le point $B(1,-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(1,0)$.

5.2.2 Équation paramétrique

Notons $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $u = (\alpha, \beta)$. Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire

$$(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_A + \lambda\alpha \\ y & = & y_A + \lambda\beta \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R} \, .$$

Nous appelons une telle équation **une équation paramétrique de** $\mathcal{D}$.

Exercice 5.10. Donner une équation paramétrique des droites de l'Exercice 5.9.

5.2.3 Équation cartésienne

Soit $A(x_A, y_A)$ un point du plan, $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul, et $\mathcal{D}$ la droite . Un point $M(x, y)$ du plan appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM} = (x - a, y - b)$ et $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ sont colinéaire. En utilisant la Proposition 5.6, on obtient

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0 \, .$$

En posant $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_A - \beta x_A$, on obtient que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des solutions à l'équation

$$ax + by + c = 0 \, .$$

On appelle une telle équation un **équation cartésienne** de $\mathcal{D}$. Remarquons que le vecteur $\vec{v} = (a, b) = (\beta, -\alpha)$ est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ de $\mathcal{D}$ (et donc à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$).

Exercice 5.11. Pour chacune des équations suivantes, déterminer si l'ensemble des solutions est une droite. Si c'est le cas, tracer la droite en question et en donner un point et un vecteur directeur.

1. $y = 2x - 1$
2. $2y + 6x - 3 = 0$
3. $y + x^2 = 0$
4. $4y + x + 4 = -2 + 2x$
5. $x = 9$
6. $xy = 0$
7. $y = -1$

Exercice 5.12. Tracer et donner une équation cartésienne de la droite :

1. Passant par les points $A(0, 0)$ et $B(4, 2)$
2. Passant par les points $A(1, 1)$ et $B(20, 10)$
3. Passant par les points $A(1, 1)$ et $B(1, 20)$.
4. Passant par le point $A(1, 2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\text{vd}}$ $(-1, 1)$
5. Passant par le point $A(2, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\text{vd}}$ $(0, 3)$
6. Passant par le point $A(-1, 5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\text{vd}}$ $(40, 40)$

Exercice 5.13. Donner une équation cartésienne des droites de l'Exercice 5.9.

Chapitre 6

Fonctions usuelles

6.1 Fonctions réelles : premières définitions

Nous appellerons **fonction (réelle)** une application $f : D_f \to \mathbb{R}$, où D_f est un sous-ensemble de f appelé le **domaine de définition** de la fonction f.

Exercice 6.1. Déterminer le plus grand domaine de définition sur lequel les fonctions suivantes peuvent être définies :
$f_1(x) = \frac{x-1}{4x^2+4x+1}$; $f_2(x) = \sqrt{x^2+x+1}$; $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$.
$f_4(x) = \ln(x^2-3x)$; $f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+2}$; $f_6(x) = \frac{x}{\exp(x^2)+1}$.

Le **graphe** d'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est le sous-ensemble

$$\mathcal{C}_f = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x \in D_f\right\} .$$

6.2 Fonctions usuelles

6.2.1 Fonctions Puissances

Soit $k \in \mathbb{N}$, la fonction puissance est donnée par

$$f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^k \end{array} .$$

Son graphe est représenté dans la Figure 6.1.

6.2.2 Fonction Exponentielle

La proposition suivante sera admise :

Proposition 6.2. *Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f(x) = f(x) \ \ et \ \ f(0) = 1 \ .$$

*Nous l'appellerons **fonction exponentielle** et noterons $f(x) = \exp(x)$ ou $f(x) = e^x$.*

Le graphe de la fonction exponentielle est représentée dans la Figure 6.2.

Proposition 6.3. *Soit a et b deux réels et k un entier naturel. On a*

1. $e^a 0$

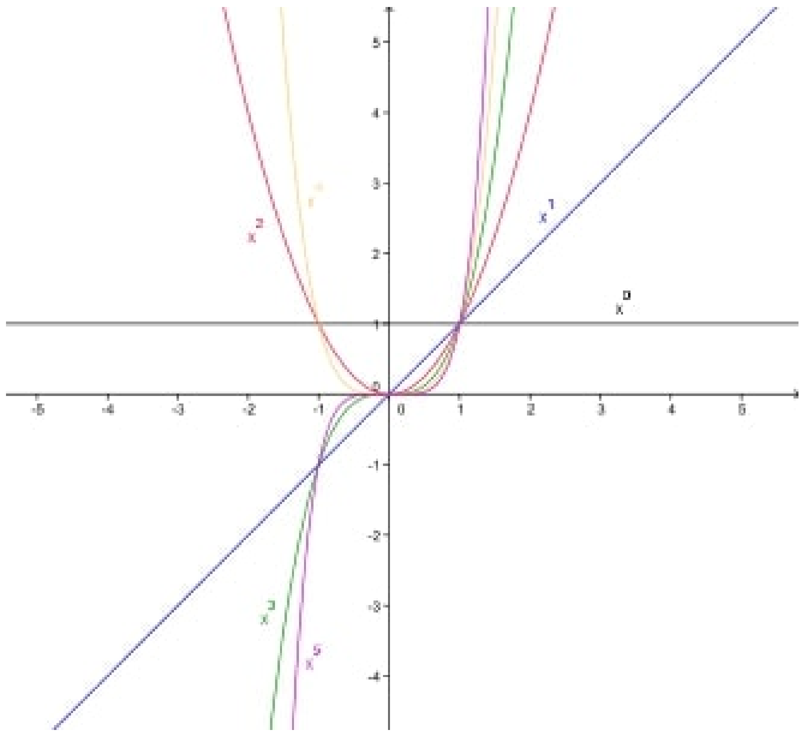


FIGURE 6.1 – Graphe des fonctions puissances

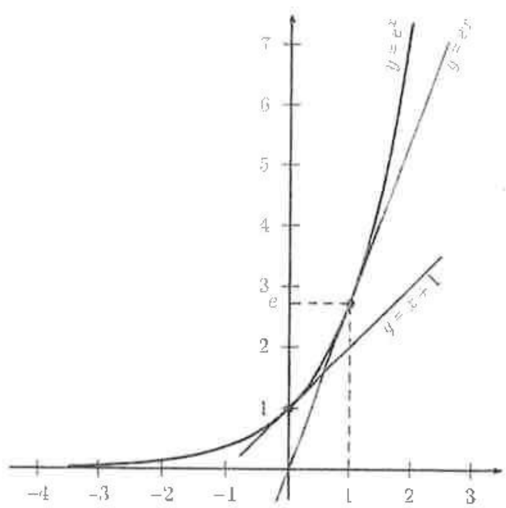


FIGURE 6.2 – Graphe de la fonction exponentielle

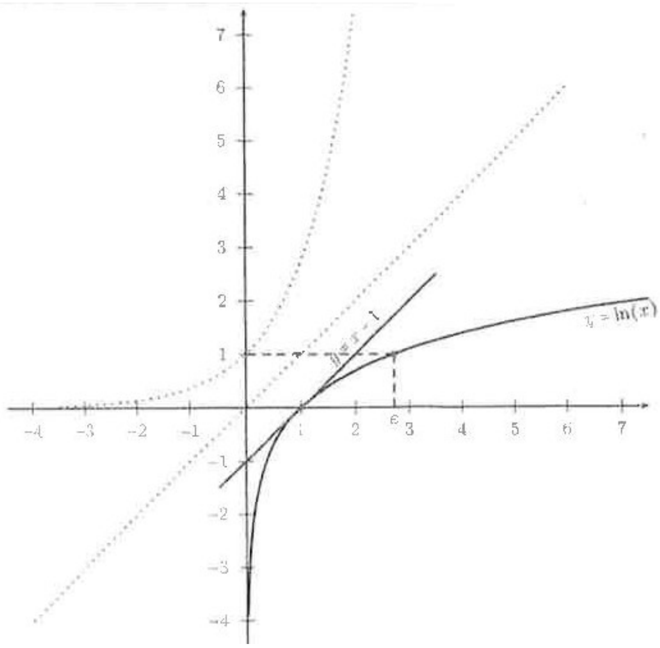


FIGURE 6.3 – Graphe de la fonction logarithme népérien

2. $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
3. $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
4. $(e^a)^k = e^{ka}$
5. $e^1 = e = 2,71\ldots$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Exercice 6.4. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^x \times e^{-x}$, $B = e^x + 2e^x$, $C = (e^x)^3 e^{-2x}$, $D = (e^x)^{-2} e^{3x}$, $E = e^{3x+2} \times e^{1-2x}$,
2. $F = \frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$, $G = \frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$, $H = \sqrt{3e^{-x} + 6e^{-x}}$ et $I = \sqrt{\frac{2e^{3x+1}}{e^{2x-1}}}$

6.2.3 Fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle réalise une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, pour tout $x > 0$ l'équation $e^y = x$ possède une unique solution que nous noterons $y = \ln(x)$. La fonction

$$\begin{array}{rccc} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \ln(y) \end{array}$$

est appelée **logarithme népérien**. Son graphe est représenté Figure 6.3.

Proposition 6.5. *Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$. On a*

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
3. $\ln(a^k) = k\ln(a)$
4. $\ln(1) = 0$

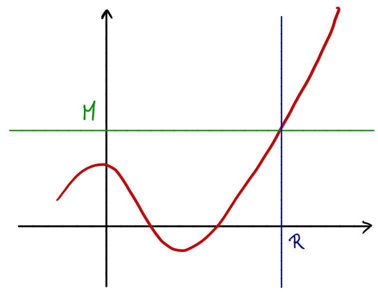


FIGURE 6.4 – $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

5. $\ln(e) = 1$
6. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
7. $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

Exercice 6.6. Calculer $x = \ln 216 - 3(\ln 2 + \ln 3)$ et $y = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln \frac{1}{4}$.

6.3 Limites de fonctions

6.3.1 Limites : définitions

Définition 6.7. *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini, et on le note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si*

$$\forall M > 0, \exists R > 0 \text{ tel que si } x > R \text{ alors } f(x) > M\,.$$

Cette définition est illustrée dans la Figure 6.4.
De manière analogue, on peut définir :

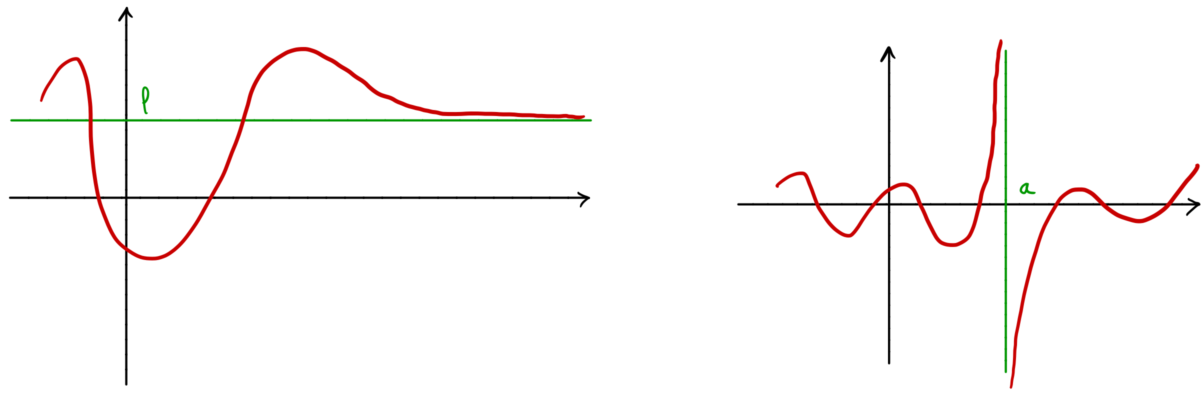
1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. On parle dans ce cas **d'asymptote horizontale**. Cette limite est illustrée en Figure 6.5a.
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. On parle dans ce cas **d'asymptote verticale**. Cette limite est illustrée en Figure 6.5b.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

Exercice 6.8. Parmi les fonctions $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{x}$ et $f_4(x) = x^{-2}$, lesquelles ont une représentation graphique qui admet une asymptote horizontale en $+\infty$ ou $-\infty$?

6.3.2 Opérations sur les limites

f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f.g$ a pour limite	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?



(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

FIGURE 6.5

f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$l>0$ *ou* $+\infty$	$l<0$ *ou* $-\infty$	$l>0$ *ou* $+\infty$	$l<0$ *ou* $-\infty$	0
g a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$	0^+	0^+	0^-	0^-	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Composée de limites. Soient a, b et c des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Soient f et g deux fonctions.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{t \to b} g(t) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$.

Exercice 6.9. Soient les 3 fonctions suivantes.

$$f_1(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x+2}, \quad f_2(x) = 2 - \frac{5}{x^2}, \quad f_3(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{1+x}.$$

Déterminer les limites de f_1, f_2 et f_3 en $+\infty$ et $-\infty$. Déterminer la limite de f_1 en -2, la limite de f_2 en 0 et la limite de f_3 en -1.

Exercice 6.10. Déterminer les limites suivantes.
$\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2 - 7x + 5)$, $\lim\limits_{x \to 0, x>0} \frac{2x-3}{x^2+x}$, $\lim\limits_{x \to 0, x<0} \frac{2x-3}{x^2+x}$, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x+1}{(x-1)^2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}$.

6.3.3 Comment lever une indétermination

Les **quatre formes indéterminées** sont : $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$.
Une méthode consiste à **mettre le terme prépondérant en facteur.**

Exercice 6.11. Déterminer les limites suivantes :
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 - 3x + 5$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 7}{3x^2 + x + 1}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - x + 5}{x+1}$, $\lim\limits_{x \to -1, x>-1} \frac{4x^2 - x + 5}{x+1}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}$.

6.4 exercisecices supplémentaires

Exercice 6.12. Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x}$, $\lim_{x\to-\infty}(1-(x-2)^2)$.

Exercice 6.13. Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0}\cos(x)$, $\lim_{x\to-\infty}\cos(\frac{1}{x})$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sin 2x}$.

Exercice 6.14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
$e^{-x}+1=0$; $e^{3x+1}-e^{-x}<0$; $e^{2x}+2e^{x}<3$; $e^{3x}=4$; $e^{-2x}<2$.

Exercice 6.15. Dans chacun des cas suivants, déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
$f : x \mapsto e^{3-x}$ sur $\mathbb{R}$; $f : x \mapsto \frac{e^{2x}+2}{e^x-1}$ sur $\mathbb{R}^*$, $f : x \mapsto e^{2x}-e^x+1$ sur $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto e^{\frac{1+x^2}{1+x}}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Exercice 6.16. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
$\ln(5-x)>2\ln(x+1)$; $\ln x=0$; $(2+x)\ln(x-3)=0$; $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(4+2x)$; $\ln x\geq 2\ln 5$; $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)\geq 0$; $2^x=3^{2x+1}$; $(\frac{1}{3})^x=\frac{3}{2}$; $4^x-5\cdot 2^x+6\leq 0$

Exercice 6.17. Déterminer les limites suivantes :
$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{3x+5}{x-1}\right)$; $\lim_{x\to-2^+}\ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$; $\lim_{x\to 1^-}\ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$; $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$; $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$

Exercice 6.18. Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes en 0^+ et en $+\infty$:
$f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$; $h(x)=\dfrac{-1}{\ln x-1}$; $i(x)=(\ln x)^2-\ln x$.

Chapitre 7

Études de fonctions

7.1 Continuité

Pour ce cours, nous nous limiterons à la notion intuitive suivante de continuité : si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, un fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **continue** si **on peut tracer son graphe "sans lever le crayon"**.

Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition :

1. $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{R}$,
2. $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{R}^*$,
3. $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,
4. $f(x) = \ln x$ sur $]0, +\infty[$,
5. $f(x) = \exp x$ sur $\mathbb{R}$.
6. $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$.

En additionnant, en multipliant et en quotientant (à condition, de se situer en dehors des points qui annulent le dénominateur) des fonctions continues, on construit de nouvelles fonctions continues.
Exemples. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ et les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

7.2 Dérivabilité

7.2.1 Premières définitions

Définition 7.1. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D_f$.*

1. *On dit que f **est dérivable en** a si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda \, .$$

*Dans ce cas λ est appelé **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$.*

2. *On dit que f **est dérivable sur** D_f si f est dérivable en tout point de D_f. Dans ce cas, la **fonction dérivée de** f est la fonction*

$$f' : \begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} .$$

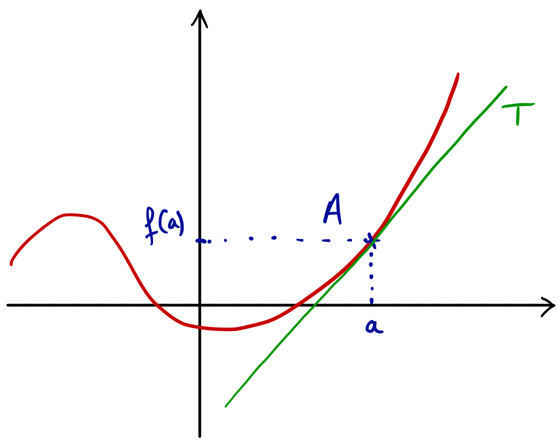
Remarque 7.2. Une fonction dérivable est continue. Cependant, la réciproque est fausse !

7.2.2 Droite tangente

Définition 7.3. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in D_f$, $\mathcal{C}_f$ le graphe de f et $A(a, f(a)) \in \mathcal{C}_f$. La **tangente à** $\mathcal{C}_f$ **en** A est la droite T passant par A et de pente $f'(a)$.*

En particulier, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(a, f(a))$ a pour équation

$$y = f'(a)(x - f(a)) + f(a) .$$



Exercice 7.4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x+1)^2 + 2$.

1. Calculer $f'(0)$.
2. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(0, 3)$.

7.2.3 Calculs de dérivées

Pour calculer la dérivée d'une fonction à partir de son expression, on se sert le plus souvent des formules et règles suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$g(x) = f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

Proposition 7.5. *Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.*

1. *la fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$,*
2. *la fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$,*
3. *la fonction ku (k est une constante réelle) est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$,*
4. *si $v(x) \neq 0$ sur I, la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$.*
5. *si $v(x) \neq 0$ sur I, la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.*

Exercice 7.6. Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.
$f_1 : x \mapsto \frac{x^2+3x-7}{10}$, $f_2 : x \mapsto x + \sqrt{x}$, $f_3 : x \mapsto \frac{x^2+2x+2}{x^2+x}$, $f_4 : x \mapsto x^2 \cos x$, $f_5(x) = 4xe^x$.

Exercice 7.7. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes en son point d'abscisse a.
$f_1 : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ en $a = 2$; $f_2 : x \mapsto \sqrt{x} + 3$ en $a = 1$; $f_3 : x \mapsto \frac{2x}{x+2}$ en $a = 0$.

7.3 Représentation graphique d'une fonction

Définition 7.8. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.*

1. *f est croissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$. f est décroissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$.*
2. *f est strictement croissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$. f est strictement décroissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.*
3. *f est constante sur I ssi $\forall a, b \in I$, $f(a) = f(b)$.*
4. *On dit que f est monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I. On dit que f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.*

Proposition 7.9. *Soit f une fonction dérivable sur I.*

1. *Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.*

2. *Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.*

7.3.1 Procédé

Afin de tracer le graphe d'une fonction, on procède ainsi :

1. On précise les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité.
2. Là où c'est possible, on calcule la dérivée f' et on étudie son signe. Ceci indique les variations de la fonction f (on reporte les résultats dans un tableau).
3. On détermine les éventuels extrema de f et la valeur qu'elle y prend.
4. On calcule les limites de f aux bornes du domaine de définition.
5. On détermine les éventuelles asymptotes.
6. On peut aussi calculer, à la main, quelques valeurs simples prises par la fonction f.
7. Puis, on reporte le tout dans un plan muni d'un repère.

Exercice 7.10. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+1}$.

1. Calculez $f'(x)$ pour tout réel $x \in]-1, +\infty[$ et vérifiez que $f'(x)$ a le même signe que $2x^3 - 3x^2 - 1$.
2. On note g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
   (a) Etudiez les variations de g.
   (b) Prouvez que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]-1, +\infty[$ et que $\alpha \in [1.6; 1.7]$.
   (c) Déduisez-en, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
3. En utilisant les résultats précédents, dressez le tableau de variastions de f.
4. Ecrivez une équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$, courbe représentative de f, au point A d'abscisse 0. Etudiez la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ sur l'intervalle $]-1, 1]$.
5. Prouvez que $\mathcal{C}$ est située au-dessus de sa tangente d au point d'abscisse 1.
6. Tracez $\mathcal{C}$, Δ et d.

7.3.2 Exercices supplémentaires.

Exercice 7.11. .
1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. Prouvez que f n'est pas dérivable en zéro.
2) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Prouvez que g n'est pas dérivable en zéro.
3) Soit h telle que $h(x) = 2 - x^2$ si $x < 1$ et $h(x) = \frac{1}{x}$ si $x \geq 1$. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas dérivable en 1.

Exercice 7.12. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :
$i(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$; $j(x) = (x-1)[2\ln(x) + 5]$ sur $I =]0, +\infty[$; $k(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7.13. Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.
$f_1 : x \mapsto \left(\frac{x}{3+2\sqrt{x}}\right)^2$, $f_2(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$,

Exercice 7.14. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à la droite d d'équation $y = -4x + 6$?

Chapitre 8

Calcul intégral

8.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

Choisissons un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. L'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$ où K est le point de coordonnées $(1, 1)$.

Définition 8.1. *Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie, continue et positive sur $[a, b]$.*

1. *Le* **domaine situé sous la courbe** *$\mathcal{C}_f$ est le domaine situé entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.*

2. *L'***intégrale de** a **à** b **de la fonction** *f est l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous sa courbe $\mathcal{C}_f$. On la note $\int_a^b f(x)dx$.*

Relation de Chasles. Pour tous a, b, c tels que $a \leq b \leq c$, $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Exercice 8.2. 1) Soit la fonction f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[0, 2]$ puis donner la valeur de $\int_0^2 f(x)dx$ sans calcul. 2) Soit la fonction f définie sur $[1, 3]$ par $f(x) = x + 1$. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[1, 3]$ puis déterminer la valeur de $\int_1^3 f(x)dx$ comme l'aire d'un trapèze rectangle.

8.2 Primitives

8.2.1 Définition

Théorème 8.3. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée la fonction f.*

Définition 8.4. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une* **primitive de** *f* **sur** *I si F est dérivable sur I et que $F' = f$.*

Proposition 8.5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et qui admet une primitive F sur I.*

1. *L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble $\{F + C : C \in \mathbb{R}\}$.*
2. *Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.*

Remarque 8.6. Une fonction a une infinité de primitives. La primitive n'est définie qu'à une constante additive près.
Il n'y a unicité de la primitive que si l'on impose une valeur particulière en un point donné de I.

8.2.2 Calculs de primitives

Théorème 8.7. *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.*

fonction f	primitives de f sur I	conditions sur u
$u'u^n (n \in \mathbb{Z}^* \text{ et } n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	lorsque $n < -1, u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$u'v + uv'$	$uv + C$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$	$u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u'e^u$	$e^u + C + C$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$ sur I

8.2.3 Formulaire de primitives

f est définie sur	I	les primitives de f sur I sont
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$kx + C$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$\ln x + C$
$\frac{1}{x}$	$] - \infty, 0[$	$\ln(-x) + C$
$-\frac{1}{x^2}$	$] - \infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\frac{1}{x} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$

Soient $a > 0$ et b deux réels. Les primitives de $\frac{1}{ax+b}$ sont $\frac{1}{a}\ln(ax + b) + C$ sur $]\frac{-b}{a}, +\infty[$ et sont $\frac{1}{a}\ln(-ax - b) + C$ sur $] - \infty, \frac{-b}{a}[$.
Soient $a \neq 0$ et b deux réels. Les primitives de e^{ax+b} sont $\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.8. Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I vérifiant la condition indiquée.

1. $f(x) = 4x^2 - 3x + 2, I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 0$.
2. $f(x) = 3x + 1 + \frac{1}{x^2}, I =] - \infty, 0[$ et $F(-2) = 1$.
3. $f(x) = (x^2 + 1)^2, I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 0$.
4. $f(x) = e^{x+1}$ et $F(\ln 2) = 0$.

Exercice 8.9. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto 10e^x + \frac{18x-\pi}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$;
2. $f : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$;
3. $f : x \mapsto \frac{1}{(2x-1)^4}$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$;
4. $f : x \mapsto x^2e^{2x^3}$ sur $\mathbb{R}$;
5. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$;
6. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$ sur $I =]0, +\infty[$

8.3 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

8.3.1 Définition

Définition 8.10. *Soit f une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle I. Pour a et b dans I, l'***intégrale de** *a* **à** *b* **de** *f, notée $\int_a^b f(x)dx$ est le nombre réel $F(b) - F(a)$, noté $[F(x)]_a^b$, où F est une primitive de f sur I.*

Remarque 8.11. — Dans cette définition, il est important que f soit continue sur $[a,b]$ fermé.

— La lettre x, dite "variable muette", n'a pas d'importance en soi ; on aurait aussi pu écrire $\int_a^b f(t)dt$ ou encore $\int_a^b f(u)du$, etc.

— La primitive que l'on a choisi dans la définition n'importe pas : si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors on a $F_1 - F_2 = C$ où C est une constante, donc $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) + C - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$.

8.3.2 Aire algébrique

Dans un repère orthogonal, $\mathcal{D}$ est le domaine situé entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. **L'aire algébrique** de $\mathcal{D}$ est la somme des portions d'aires comptées positivement lorsque $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de l'axe des abscisses et comptées négativement lorsque $\mathcal{C}_f$ est située au dessous de l'axe des abscisses. Cette aire algébrique est égale à $\int_a^b f(x)dx$.

8.3.3 Propriétés des intégrales pour des fonctions continues de signe quelconque

Proposition 8.12. *1. Si $f = 0$, alors $\int_a^b f(x)dx = 0$;*

2. *Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (mais la réciproque est fausse).*

3. *Si $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.*

4. *L'intégrale est linéaire : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, g sont continues sur $[a,b]$, alors*
$$\int_a^b (f + \lambda g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt$$

5. *l'intégrale vérifie la relation de Chasles : si f est continue sur I et que $a, b, c \in I$ (ne vérifiant pas nécessairement $a \leq b \leq c$), alors*
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$
En particulier, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Théorème 8.13. *Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Soit $\alpha \in [a,b]$. Alors la fonction F définie sur $[a,b]$ par $(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(t)dt$, est la primitive de f sur $[a,b]$, nulle en α.*

Exercice 8.14. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^{-1} (t^2 - 4t + 3)dt$;
2. $\int_0^{\pi} \cos t dt$;
3. $\int_1^2 (t^2 + t - \frac{1}{t} + \frac{3}{\sqrt{t}})dt$;
4. $\int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$;
5. $\int_0^1 5(e^{x+9} + x^9)dx$;
6. $\int_{-1}^1 \frac{1}{2x+3}dx$,

8.4 Exercices supplémentaires.

Exercice 8.15. Déterminer une primitive sur I pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f : x \mapsto \frac{5}{x^3}$ sur $]0, +\infty[$;
3. $f(x) = 2\sqrt{2x+3}$ sur $]-\frac{3}{2}, +\infty[$;
4. $g(x) = \frac{e^{3x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$,
5. $h(x) = 3xe^{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$,
6. $i(x) = \frac{e^x}{(3e^x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$,
7. $j(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2e^x+1}}$ sur $\mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto \frac{2}{x-1}$ sur $]0, +\infty[$.
9. $g : x \mapsto \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2}$ sur $]0, +\infty[$.
10. $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
11. $k : x \mapsto \frac{\ln 2 - 3\sqrt{x}\ln x}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8.16. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_4^1 \frac{e^{\sqrt{t}-1}}{2\sqrt{t}} dt$,
2. $\int_{-1}^2 |x^2 - 2x| dx$,
3. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t/2) dt$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t/2) dt$ (calculer d'abord $J + K$ et $J - K$).