Période Enjeux – Maths0

Portail SV

Année 2025-2026

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

Table des matières

Chapitre 1

Logique et ensembles

1.1 Ensembles

Un **ensemble** est une collections d'objets, que l'on appelle les **éléments** de l'ensemble. Les ensembles se notent entre accolades, par exemple

$$A = \{1, 4, 8\}$$

est l'ensemble contenant 3 éléments : les nombres 1, 3 et 8. L'appartenance à un ensemble est notée $\in$.

Exemple 1.1. 1. *L'ensemble des **entiers naturels** est*

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}\ .$$

2. *L'ensemble des **entiers relatifs** est*

$$\mathbb{Z} = \{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}\ .$$

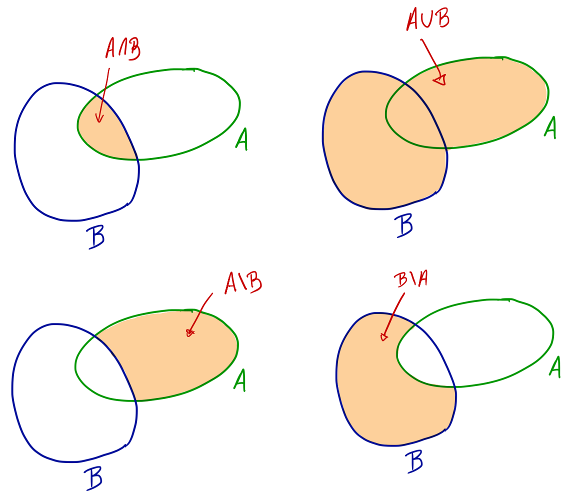
3. *L'ensemble des **rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des fractions de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs.*

4. *L'ensemble des **réels** est noté $\mathbb{R}$.*

5. ***L'ensemble vide**, noté $\emptyset$, est l'ensemble ne contenant aucun élément.*

Définition 1.2. Soit A et B deux ensembles.

1. On dit que A est **inclus** dans B si tout élément de A est un élément de B (on dit aussi que A est un **sous-ensemble** de B). On le notera $A \subset B$.
2. Le **complémentaire** d'un sous-ensemble A de B est l'ensemble $\overline{A}$ des éléments de B qui ne sont pas dans A.
3. **L'union** de A et B est l'ensemble $A \cup B$ des éléments appartenant à A ou à B.
4. **L'intersection** de A et B est l'ensemble $A \cap B$ des éléments appartenant à A et à B.
5. **La différence** de A par B est l'ensemble $A \setminus B$ des éléments qui appartiennent à A mais n'appartiennent pas à B.



Exercice 1.3. Décrire les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$ lorsque

1. $A = \{-1, 4, 8, 10, \pi$ et $B = \{4, 10, \pi, -1\}$.
2. $A = \{a, d, g, t, r, s\}$ et $B = \{r, d, u, w, g\}$.
3. $A = \mathbb{N}$ et $B = \mathbb{Q}$.
4. $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{N}$.

Proposition 1.4 (Loi de Morgan)**.** *Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.*

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

1.2 Logique

Une **assertion** est une phrase, mathématique ou non, dont on peut dire sans ambiguïté si elle est vraie (1) ou fausse (0). Pour écrire les assertions mathématiques, nous utiliserons souvent les notations suivantes (aussi appelées *quantificateurs*) :

$$\forall \ : \ \text{pour tout} \quad \exists \ : \ \text{il existe} \quad \nexists \ : \ \text{il n'existe pas} \quad \exists! \ : \ \text{il existe un unique.}$$

Exemple 1.5.

1. *Aujourd'hui il pleut.*
2. *Au moins un étudiant de la classe a plus de 18 ans.*
3. *Tous les étudiants de L1 aiment les mathématiques.*
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x > 0.$
5. $\forall x \in \mathbb{N}\ ,\ -x \in \mathbb{N}.$
6. $\forall x \in \mathbb{Q} \exists y \in \mathbb{N}\ ,\ y > x.$
7. $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}\ ,\ y > x.$

Définition 1.6. La **négation** d'une assertion A est l'assertion $\overline{A}$ qui est vraie lorsque A est fausse, et fausse lorsque A est vraie.

Il est très pratique de représenter les relations entre différentes assertions via leurs **tables de vérité**. Par exemple :

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Exercice 1.7. Donner les négations des assertions de l'exemple 1.5.

Exercice 1.8. Dans les cas suivant, dire si l'assertion est vraie ou fausse, et donner sa négation :

1. $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $x + y = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{Q} \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $xy = 1$.
3. $\forall \epsilon > 0 \exists x > 0$ tel que $x < \epsilon$.
4. $\forall \epsilon > 0 \exists x > 0$, $x \in \mathbb{N}$ tel que $x < \epsilon$.

Définition 1.9. Soit A et B deux assertions.

1. **A et B** est l'assertion notée $A \wedge B$, qui est vraie si et seulement si A est vraie et B est vraie.
2. **A ou B** est l'assertion notée $A \vee B$, qui est vraie si et seulement si A est vraie ou B est vraie.
3. **A implique B** est l'assertion notée $A \Rightarrow B$ qui est vraie si et seulement si B est fausse ou (A est vraie et B est vraie).
4. A **est équivalente à** B est l'assertion notée $A \Leftrightarrow B$, qui est vraie si et seulement si A et B sont simultanément vraies ou fausses.

Voici les tables de vérités :

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Remarque 1.10. Il peut sembler bizarre qu'une assertion fausse puisse impliquer une assertion vraie. Ce qu'il faut retenir est que la seule possibilité pour que l'implication $A \Rightarrow B$ soit fausse est lorsque A est vraie et B est fausse : **"le vrai n'implique pas le faux"**.

Exercice 1.11. Dans les cas suivant, dire si l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie :

1. $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 0$.
2. $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \geq 0$.
3. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x = y^2$.

Définition 1.12. Soit A et B deux assertions.

1. La **contraposée** de $A \Rightarrow B$ est $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.
2. La **réciproque** de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$.

Proposition 1.13. *Une implication est équivalente à sa contraposée.*

Exercice 1.14. Décrire les contraposées et les réciproques des implications de l'exercice 1.11 et dire si elles sont vraies ou fausses.

1.3 Exercices supplémentaires

Exercice 1.15. Soit A et B deux ensembles. Montrer l'égalité

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) .$$

Exercice 1.16. Soit A et B deux assertions. Montrer les équivalences suivantes

1. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
2. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \vee \overline{A})$.
3. $\overline{(A \Rightarrow B)} \Leftrightarrow (\overline{B} \wedge A)$.

Exercice 1.17. Démontrer la Proposition 1.4 et la Proposition 1.13.

Chapitre 2

Calculs dans l'ensemble des réels

2.1 Fractions

Exercice 2.1. Calculer et écrire sous forme irréductible :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{7}-\frac{1}{5}, \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{6}, \quad \frac{2}{\frac{5}{6}}, \quad \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}, \quad \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}},$$

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}, \quad \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}, \quad \frac{10}{x}-\frac{7}{2x}, \quad \frac{1+x}{2-x}+\frac{5}{2-x}, \quad \frac{1+x}{2-x}+\frac{1}{1-x}.$$

2.2 Inégalités dans $\mathbb{R}$

2.2.1 Intervalles

Définition 2.2. On appelle *intervalle fermé* de $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de l'une des formes suivantes.

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},\ [a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\},\ ]-\infty;a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},\ \mathbb{R} \text{ ou } \emptyset,$$

où $a < b$ sont des nombres réels. On appelle *intervalle ouvert* de $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de l'une des formes suivantes.

$$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},\ ]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\},\ ]-\infty;a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\},\ \mathbb{R} \text{ ou } \emptyset,$$

où $a < b$ sont des nombres réels. Enfin, on appelle *intervalle* de $\mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ouvert, un intervalle fermé ou un ensemble de l'une des formes suivantes

$$[a;b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},\ ]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

où $a < b$ sont des nombres réels.

Exercice 2.3. Écrire sous forme d'intervalle (ou de réunion d'intervalles) les sous ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

1. $A = \{x \in \mathbb{R},\ -1 < x \leq \sqrt{2}\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R},\ 2 \leq x < 5 \text{ et } 6 \leq x < 7\}$
3. $C =]-5,\pi] \cap [2,18[$
4. $D = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 4\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 9\}$

2.2.2 Règles de calcul sur les inégalités

1. $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$, si $a < b$ et $c < d$, alors $a+c < b+d$,
2. $\forall a,b \in \mathbb{R}$ et $\forall k > 0$, si $a < b$, alors $ka < kb$,
3. $\forall a,b \in \mathbb{R}$ et $\forall k < 0$, si $a < b$, alors $ka > kb$,
4. $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$, si $0 \leq a < b$ et $0 \leq c < d$, alors $0 \leq ac < bd$,
5. $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$, si $a < b \leq 0$ et $c < d \leq 0$, alors $0 \leq bd < ac$.
6. $\forall a,b \in \mathbb{R}$, si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$).
7. $\forall a,b \in \mathbb{R}$, si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0,+\infty[$).

Exercice 2.4. Dans chacun des cas suivants, déterminer **sans calculatrice** lequel des deux nombres proposés est le plus grand.

1. $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{3}$.
2. $\frac{7}{12}$ et $\frac{5}{7}$.
3. $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
4. $\sqrt{3}$ et 2.
5. $2+\sqrt{3}$ et 4.
6. $\sqrt{2}$ et $\frac{3}{2}$.
7. $\sqrt{5}$ et $\frac{7}{3}$.
8. $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$ et 3.
9. $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$ et $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$.

Exercice 2.5. Encadrer :

1. $\frac{x+1}{2x+3}$ pour $x \in [0,2]$.
2. $\sqrt{2x+1}$ pour $x \in [1,2]$
3. $\frac{1}{4x+5}$ pour $x \in [-1,5]$
4. $\frac{x+1}{2x+2}$ pour $x \in [0,2]$
5. $(x+2)(x-10)$ pour $x \in [3,5]$
6. $\frac{x+2}{x-10}$ pour $x \in [3,5]$
7. $x^2-8x-20$ pour $x \in [3,5]$.
8. $(5x+3)^2$ pour $x \in [0,2]$ puis pour $x \in [-1,1]$

2.2.3 La valeur absolue

Sur $\mathbb{R}$, on appelle valeur absolue l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{rcll} |\, x\,| & = & x & \text{si } x \geq 0 \\ |\, x\,| & = & -x & \text{si } x < 0 \end{array}.$$

Ainsi, si a et b sont deux nombres réels, $|a-b|$ représente la distance entre a et b sur l'axe réel.

2.2.4 Majorants et minorants

Définition 2.6. Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dira que E est **majoré** (respectivement **minoré**) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que pour tout $x \in E$ on ait $x \leq M$ (resp. $x \geq m$).
Un élément M vérifiant la propriété ci dessus s'appelle un majorant de E (resp. m s'appelle un minorant de E).
Un ensemble qui est à la fois majoré et minoré est dit **borné**.

Exemple 2.7. *L'intervalle $A =]-\infty, 1[$ est majoré, mais il n'est pas minoré. Les nombres 5, π, 2, 1 sont des majorants de A. Il en existe une infinité d'autres. L'ensemble A ne possède aucun minorant.*

Définition 2.8. Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dira que E possède un maximum s'il existe $M \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \leq M$. On dira que E possède un minimum s'il existe $m \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \geq m$.

ATTENTION : La différence fondamentale entre cette définition et la précédente porte sur le fait que le majorant M appartient ou pas à l'ensemble E. Par exemple, l'ensemble $A = [0,1]$ possède un maximum et un minimum : $\max(A) = 1$ et $\min(A) = 0$. Par contre, l'ensemble $B = [0,1[$ n'a pas de maximum (bien qu'il soit borné).

Exercice 2.9. (i) Dessiner l'ensemble
$$A = \{x \in \mathbb{R}, |x| < 2\}.$$
Dans la liste suivante, quels sont les majorants (resp. minorants) de A ?
$$-5,\ -2,\ 0,\ 1,\ 5,\ 7,\ 10$$
(ii) Dessiner l'ensemble
$$B = \{x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq \sqrt{2}\}.$$
Dans la liste suivante, quels sont les majorants (resp. minorants) de B ?
$$-5,\ -2,\ 0,\ 1,\ 5,\ 7,\ 10$$
(iii) Dessiner l'ensemble
$$C = \{x \in \mathbb{R}, |x-2| \geq -2\}.$$
Dans la liste suivante, quels sont les majorants (resp. minorants) de C ?
$$-5,\ -2,\ 0,\ 1,\ 5,\ 7,\ 10$$
(iv) Dessiner l'ensemble $D = A \cap B$. Dans la liste suivante, quels sont les majorants (resp. minorants) de D ?
$$-5,\ -2,\ 0,\ 1,\ 5,\ 7,\ 10$$

2.3 Symboles $\sum$, $\prod$ et factorielle

Notons $n_0 \leq n_1$ des entiers relatifs et $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_1}$ des nombres réels. On note
$$\sum_{i=n_0}^{n_1} x_i = x_{n_0} + x_{n_0+1} + \ldots + x_{n_1}.$$
Par exemple, $\sum_{i=0}^{3} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$.
Noter que le i qui apparait dans la formule ci-dessus est une variable muette : on aurait pu la remplacer par n'importe quelle autre lettre. Par exemple
$$\sum_{k=0}^{3} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = \sum_{i=0}^{3} i^2.$$
Par convention, une somme vide est égale à 0. Par exemple $\sum_{k=0}^{-1} k = 0$, puisqu'il n'y a pas d'indice k plus grand que 0 et plus petit que -1.

Exercice 2.10. (i) Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{4} i, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{3} k, \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{10} 1, \qquad S_4 = \sum_{i=1}^{n} 3, \qquad S_5 = \sum_{i=-2}^{3} (i+2), \qquad S_6 = \sum_{i=0}^{3} (i+1)^2.$$

(ii) Ecrire les additions suivantes en utilisant le symbole $\sum$ (sans les calculer) :
$S = 100 + 101 + 102 + \ldots + 199 + 200, \quad T = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{55} + \frac{1}{60}$
$R = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 38 + 40, \quad U = 3 + 9 + 15 + 21 + \ldots + 39 + 45$

(iii) Voici une table de données statistiques :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	-1	5	2	-2	5	2	1	3	4

Calculer :

$$T_1 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2, \qquad T_2 = \sum_{i=1}^{10} i x_i, \qquad T_3 = \sum_{i=1}^{5} 2x_{2i}.$$

Soient $n_0 \leq n$ des entiers relatifs et $u_{n_0}, u_{n_0+1}, \ldots, u_n$ des nombres réels. Les sommes de la forme $\sum_{k=n_0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$ sont dites télescopiques. En effet, si l'on écrit cette somme en extension, tous les termes se simplifient sauf u_{n+1} et u_{n_0}.

Par exemple,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{7} (\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) + (\sqrt{8} - \sqrt{7}) \\
&= -\sqrt{2} + (\sqrt{3} - \sqrt{3}) + (\sqrt{4} + -\sqrt{4}) + (\sqrt{5} - \sqrt{5}) + (\sqrt{6} - \sqrt{6}) + (\sqrt{7} - \sqrt{7}) + \sqrt{8}.
\end{aligned}$$

Finalement $\sum_{i=2}^{7} (\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) = \sqrt{8} - \sqrt{2}$.

Exercice 2.11. Calculer les sommes téléscopiques A et B suivantes :

$$A = \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right), \qquad B = \sum_{k=1}^{99} \left[(k+1)^3 - k^3 \right].$$

La notation $\prod$ est l'équivalent de la notation $\sum$ pour les produits. Notons $n_0 \leq n_1$ des entiers relatifs et $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_1}$ des nombres réels. On note

$$\prod_{i=n_0}^{n_1} x_i = x_{n_0} \times x_{n_0+1} \times \ldots \times x_{n_1}.$$

Par exemple, $\prod_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 \times 2^2 \times 3^2$. Par convention, un produit vide est égal à 1.

Enfin , pour un entier n, on appelle factorielle n et on note $n!$ le nombre

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Par exemple, on a $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. D'après la convention sur le produit vide, on a $0! = 1$.

Exercice 2.12. Calculer les produits suivants :

$$A = \prod_{i=1}^{3}(2i), \qquad B = 4!, \qquad C = 5!, \qquad D = \frac{5!}{4!}, \qquad E = \frac{4!}{5!}, \qquad F = \prod_{k=1}^{11}\frac{k+2}{k+3}, \qquad G = \prod_{k=1}^{3}\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Proposition 2.13. *1. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Si q est un réel différent de 1, alors

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Exercice 2.14. Calculer les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=20}^{100}(k+1), \; S_2 = \sum_{k=1}^{100}(5k+3), \; S_3 = \sum_{k=20}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \; S_4 = \sum_{k=1}^{100} 5\times 10^k, \; S_5 = \sum_{k=1}^{20}(2\times 2^k + 3k + 4).$$

Chapitre 3

Statistiques et unités de mesure

3.1 Statistiques descriptives

3.1.1 La moyenne (caractéristique de position)

Rappelons la définition de la moyenne d'une série statistique.

Soit la série statistique définie dans le tableau suivant :

Valeur	x_1	x_2	.....	x_p
Effectif	n_1	n_2	.....	n_p
Fréquences	f_1	f_2		f_p

Effectif total : $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ **et** $f_i = \frac{n_i}{N}$

La moyenne de cette série statistique est le réel, noté $\bar{x}$ **, tel que :**

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N}$$

ou en utilisant les fréquences :

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots\ldots + f_px_p$$

Exercice 3.1. Soit la série statistique répertoriant la taille en mètres de 100 requins blancs.

taille (en m)	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Effectif	8	10	25	32	19	4	2

Calculer la taille moyenne de ces 100 requins.

Exercice 3.2. Un supermarché a relevé les dépenses (en Euros) de ces clients en 2 heures un jour donné, les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

Dépenses (en Euros)	$[0;30[$	$[30;60[$	$[60;100[$	$[100;120[$
Milieu de classe	15	45	...	...
Effectif	12	25	42	67

Calculer le montant moyen des dépenses de ses clients, en utilisant les milieux des classes de la distribution.

Exercice 3.3. On étudie dans une maternité la taille moyenne de 50 nouveaux nés.

Taille (en cm)	47	48	49	50	51	52
Effectif	5	8	12	15	9	1
Fréquence	0,1	0,16	0,24	0,3	0,18	0,02

Calculer la taille moyenne de ces 50 nouveaux nés.

3.1.2 La variance et l'écart type (caractéristiques de dispersion)

Si on souhaite considérer l'amplitude des écarts $(x_i - \bar{x})$, càd les écarts sans tenir compte de leurs signes, alors l'idée consiste à élever ces écarts au carré. On obtient alors une première mesure de dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne : la variance.
Une seconde mesure de dispersion est la racine carrée de la variance : l'écart type.
Si les valeurs de la série possèdent une unité, l'écart type s'exprime dans la même unité et la variance s'exprime dans l'unité au carré.

Soit la série statistique définie dans le tableau suivant :

Valeur	x_1	x_2	.....	x_p
Effectif	n_1	n_2	.....	n_p
Fréquences	f_1	f_2		f_p

Effectif total : $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ **et** $f_i = \frac{n_i}{N}$

Soit $\overline{x}$ la moyenne de cette série .

Le réel V = $\frac{1}{N}[n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_i(x_i - \overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p - \overline{x})^2]$
est appelé variance de cette série statistique.

La racine carrée de la variance $\sigma = \sqrt{V}$ **est l'écart type de cette série.**

Exercice 3.4. Compléter le tableau suivant et calculer la variance et l'écart type de la série statistique de l'exercice 4.1.

Taille (en m) x_i	Effectif n_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
$1,5$	8		
2	10		
$2,5$	25		
3	32		
$3,5$	19		
4	4		
$4,5$	2		

Exercice 3.5. En suivant le même schéma qu'a l'exercice précédent, calculer la variance et l'écart type de la série statistique de l'exercice 4.3.

Proposition 3.6. *Une autre formule pour calculer la variance :*

$$V = \frac{1}{N}\left[n_1 x_1^2 + \ldots + n_p x_p^2\right] - (\bar{x})^2.$$

Démonstration. En reprenant la formule de la définition :

$$V = \frac{1}{N}\left[n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + n_p(x_p - \bar{x})^2\right].$$

En développant les carrés

$$V = \frac{1}{N}\left[n_1(x_1^2 - 2\bar{x}x_1 + (\bar{x})^2) + \ldots + n_p(x_p^2 - 2\bar{x}x_p + (\bar{x})^2)\right].$$

En regroupant les termes

$$V = \frac{1}{N}\left[n_1x_1^2 + \ldots + n_px_p^2\right] - 2\bar{x}\frac{1}{N}\left[n_1x_1 + \ldots + n_px_p\right] + (\bar{x})^2\frac{1}{N}\left[n_1 + \ldots + n_p\right].$$

En simplifiant

$$V = \frac{1}{N}\left[n_1x_1^2 + \ldots + n_px_p^2\right] - 2\bar{x}\bar{x} + (\bar{x})^2. \text{ CQFD}$$

Dans une série statistique peu dispersée, les observations x_i sont proches les unes des autres, et de la moyenne. Dans ce cas, les écarts $(x_i - \bar{x})$ seront de faibles amplitudes et V sera petite. Au contraire plus une série statistique est dispersée, plus V s'accroît.

Proposition 3.7. *La variance est nulle si et seulement si toutes les observations x_i ont la même valeur (aucune dispersion).*

Exercice 3.8. Faites la preuve de cette proposition.

Exercice 3.9. On étudie dans une maternité la masse de 50 nouveaux nés.

Masse (en kg) x_i	Effectifn_i	x_i^2	$n_ix_i^2$
$2,8$	14		
$2,9$	10		
3	18		
$3,1$	7		
$3,2$	1		

Calculer la masse moyenne de ces 50 nouveaux nés.
Compléter le tableau précédent.
En déduire la variance et l'écart type de cette distribution.

Exercice 3.10. Montrer que la variance vérifie en toute généralité la formule suivante

$$V = \frac{1}{2N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(x_i - x_j)^2,$$

où les x_i sont répétés suivant leur effectif.

3.2 Différents types d'unités de mesures et leurs conversions

- **<u>Unités de longueur : L'unité légale est le mètre (symbole : m)</u>**

Multiples de l'unité			**UNITÉ**	Sous-multiples de l'unité		
kilomètre	**hectomètre**	**décamètre**	**mètre**	**décimètre**	**centimètre**	**millimètre**
km	hm	dam	**m**	dm	cm	mm
1 km = 1 000 m	1 hm = 100 m	1 dam = 10 m	**1 m**	1 dm = 0,1 m	1 cm = 0,01 m	1 mm = 0,001 m

- **<u>Unités de masse : L'unité est le gramme (symbole : g)</u>**
On utilise aussi le kilogramme (kg)

Multiples de l'unité			**UNITÉ**	Sous-multiples de l'unité		
kilogramme	**hectogramme**	**décagramme**	**gramme**	**décigramme**	**centigramme**	**milligramme**
kg	hg	dag	**g**	dg	cg	mg
1 kg = 1 000 g	1 hg =100g	1 dag = 10g	**1 g**	1 dg = 0,1 g	1 cg = 0,01 g	1 mg = 0,001 g

<u>Remarques</u> : Les multiples du kilogramme sont le **quintal** (q) et la **tonne** (t). 1q=100kg et 1t=1000kg. La dizaine de kilogramme n'a pas nom particulier.

- **<u>Unités de capacité (de contenance) : l'unité légale est le litre (symbole : L)</u>** (attention L majuscule)

Multiples de l'unité			**UNITÉ**	Sous-multiples de l'unité		
kilolitre	**hectolitre**	**décalitre**	**litre**	**décilitre**	**centilitre**	**millilitre**
kL	hL	daL	**L**	dL	cL	mL
1 kL = 1 000 L	1 hL = 100 L	1 daL = 10 L	**1 L**	1 dL = 0,1 L	1 cL = 0,01 L	1 mL = 0,001 L

- **<u>Unités d'aires : l'unité légale est le mètre carré (symbole : m^2).</u>**
  1 mètre carré est l'aire d'un carré de 1 mètre de côté.

	Noms des unités	*Symboles*	*Valeurs*
Multiples de l'unité	Le kilomètre carré	km^2	1 km^2 = 1 000 000 m^2 = 100 hm^2
	L'hectomètre carré	hm^2	1 hm^2 = 10 000 m^2 = 100 dam^2
	Le décamètre carré	dam^2	1 dam^2 = 100 m^2
UNITÉ	**Le mètre carré**	**m^2**	**1 m^2**
Sous-multiples de l'unité	Le décimètre carré	dm^2	1 dm^2 = 0,01 m^2
	Le centimètre carré	cm^2	1 cm^2 = 0,000 1 m^2 = 0,01 dm^2
	Le millimètre carré	mm^2	1 mm^2 = 0,000 001 m^2 = 0,01 cm^2

Multiples de l'unité			**UNITÉ**	Sous-multiples de l'unité		
kilomètre carré	hectomètre carré	décamètre carré	**mètre carré**	décimètre carré	centimètre carré	millimètre carré
km^2	hm^2	dam^2	**m^2**	dm^2	cm^2	mm^2
	ha	a	ca			

- **<u>Unités de volume : l'unité légale est le mètre cube (symbole : m^3)</u>**

Le mètre cube représente un cube de un mètre d'arête.

	Noms des unités	*Symboles*	*Valeurs*
Multiples de l'unité	Le **kilo**mètre cube	km^3	1 000 hm^3
	L'**hecto**mètre cube	hm^3	1 000 dam^3
	Le **déca**mètre cube	dam^3	1 000 m^3
UNITÉ	**Le mètre cube**	**m^3**	**1 m^3**
Sous-multiples de l'unité	Le **déci**mètre cube	dm^3	0,001 m^3
	Le **centi**mètre cube	cm^3	0,001 dm^3
	Le **milli**mètre cube	mm^3	0,001 cm^3

Multiples de l'unité			**UNITÉ**	Sous-multiples de l'unité		
Kilomètre cube	**hecto**mètre cube	**Déca**mètre cube	**mètre cube**	**Déci**mètre cube	**Centi**mètre cube	**Milli**mètre cube
km^3	**hm^3**	**dam^3**	**m^3**	**dm^3**	**cm^3**	**mm^3**

<u>Correspondance entre volume et contenance</u>

On peut verser un litre d'eau dans un cube dont le volume est de 1 dm^3.

1 dm^3 correspond à un litre et 1 cm^3 correspond à un millilitre.

Exercice 3.11. Faites les conversions suivantes

$3km =$	m
$2,5m =$	cm
$12hm =$	dm
$5,68dam =$	m
$12cm =$	m
$0,74dm =$	mm
$5,148km =$	dam

$3,5kg =$	g
$10,38t =$	kg
$6,4g =$	cg
$124kg =$	t
$24,5mg =$	g
$157q =$	t

$29cL =$	L
$7,02L =$	mL
$18hL =$	dL
$39,1cL =$	daL
$7,45cL =$	mL
$0,568hL =$	cL
$0,002L =$	mL
$78,6cL =$	L

$2,15m^2 =$	dm^2
$2,15m^2 =$	cm^2
$46,5m^2 =$	dam^2
$976,5dm^2 =$	dam^2
$3,75ha =$	a
$4,7hm^2 =$	cm^2
$4,7hm^2 =$	km^2

$5,78hm^3 =$	m^3
$5,78hm^3 =$	km^3
$8,4m^3 =$	cm^3
$789mm^3 =$	cm^3
$89600cm^3 =$	m^3
$5dm^3 =$	m^3
$35,8dm^3 =$	mL
$35,8dm^3 =$	L
$50m^3 =$	L
$37500cm^3 =$	L
$25000mm^3 =$	cL

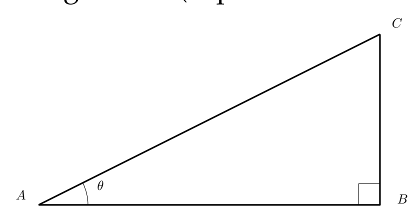
Chapitre 4

Trigonométrie

4.1 Cosinus et sinus d'un angle

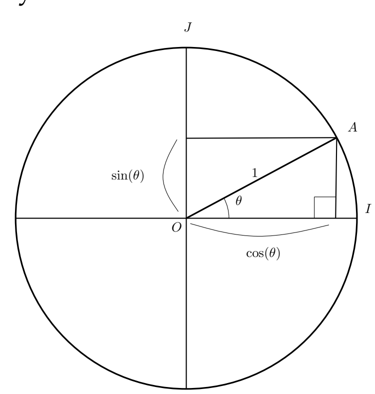
Rappelons la définition du radian, unité de mesure des angles plans.
Considérons un secteur angulaire, formé de deux droites concourantes distinctes, et un cercle de rayon r tracé dans un plan contenant ces deux droites, dont le centre est le point d'intersection des droites. Alors, la valeur de l'angle en radians est le rapport entre la longueur L de l'arc de cercle intercepté par les droites et le rayon r.

Rappelons les définitions du cosinus et du sinus d'un angle, vues au collège. Soit ABC un triangle rectangle en B. Notons θ l'angle du triangle en A (exprimé en radians).



Alors le cosinus de θ est $\cos(\theta) = \dfrac{AB}{AC}$ et le sinus de θ est $\sin(\theta) = \dfrac{BC}{AC}$. Autrement dit, $\cos(\theta)$ est le quotient de la longueur du côté adjacent à A par la longueur de l'hypothénuse du triangle rectangle et $\sin(\theta)$ est le quotient de la longueur du côté adjacent à A par la longueur de l'hypothénuse du triangle rectangle.

Le cercle trigonométrique (ou cercle unité) $\mathcal{C}$ est le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ (identifié au plan de coordonnées (xOy) muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$) constitué des points à une distance 1 de l'origine : le cercle de centre O et de rayon 1.



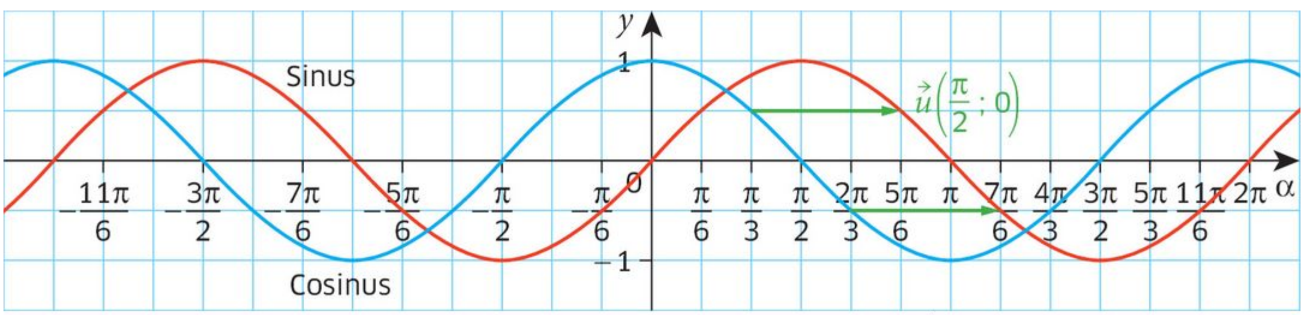
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un angle. Soit A le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \theta$ en radian. Sur le dessin ci-dessus, on voit apparaître un triangle rectangle dont l'hypoténuse a pour longueur 1. Par conséquent, lorsque θ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\cos(\theta)$ est l'abscisse du point A et $\sin(\theta)$ est son ordonnée.

Par extension, à tout réel θ, nous associons l'unique point M_θ du cercle trigonométrique obtenu de la manière suivante : on attache un fil de longueur $|\theta|$ au point $(1,0)$, puis on enroule ce fil le long du cercle trigonométrique dans le sens inverse des aiguilles d'une montre si $\theta \geq 0$ (respectivement dans le sens des aiguilles d'une montre si $\theta \leq 0$). Le point d'arrivée du fil est le point M_θ. $\cos(\theta)$ est alors l'abscisse du point M_θ et $\sin(\theta)$ est son ordonnée, dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
θ est une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_\theta})$.
Et pour finir, on peut remarquer qu'à tout point du cercle trigonométrique, correspond une infinité de mesures d'angle possibles, qui diffèrent toutes d'un multiple entier relatif de 2π (périmètre du cercle trigonométrique).

Les propriétés suivantes se déduisent immédiatement des définitions du sinus et du cosinus :
* $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (qui traduit le fait que $OA^2 = 1$).
* $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ (conséquence de la formule précédente).
* $\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta, \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$.

Voici des valeurs remarquables du cosinus et du sinus (à connaître) et leurs représentations graphiques

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Exercice 4.1. En représentant les angles suivants sur le cercle trigonométrique et en utilisant les valeurs remarquables ci-dessus, déterminer les valeurs suivantes du cosinus et du sinus.

1. $\cos(\frac{2\pi}{3})$, $\sin(\frac{2\pi}{3})$.
2. $\cos(\frac{3\pi}{4})$, $\sin(\frac{3\pi}{4})$.
3. $\cos(\frac{5\pi}{6})$, $\sin(\frac{5\pi}{6})$.
4. $\cos(\frac{-\pi}{6})$, $\sin(\frac{-\pi}{6})$.
5. $\cos(\frac{-\pi}{4})$, $\sin(\frac{-\pi}{4})$.
6. $\cos(\frac{-\pi}{3})$, $\sin(\frac{-\pi}{3})$.
7. $\cos(\frac{-2\pi}{3})$, $\sin(\frac{-\pi}{3})$.
8. $\cos(\frac{-3\pi}{4})$, $\sin(\frac{-3\pi}{4})$.
9. $\cos(\frac{-5\pi}{6})$, $\sin(\frac{-5\pi}{6})$.

Exercice 4.2. On considère un triangle ABC rectangle en B (comme sur le dessin au début du thème). Dans chacun des cas suivants, calculer la longueur exacte demandée. Les mesures des angles sont en radians et les mesures des longueurs en centimètres.

1. AB sachant que $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$ et $AC = 5$.
2. BC sachant que $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$ et $AC = 4$.
3. AC sachant que $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ et $AB = 8$.
4. AC sachant que $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ et $BC = 3$.

Exercice 4.3. On fixe un angle x. A l'aide du cercle trigonométrique, exprimer les quantités suivantes en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

1. $\cos(-x)$
2. $\sin(-x)$
3. $\cos(\pi + x)$
4. $\sin(\pi + x)$
5. $\cos(\pi - x)$
6. $\sin(\pi - x)$
7. $\cos(\frac{\pi}{2} + x)$
8. $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$.

4.2 Identités remarquables, développement et factorisation

Développer une expression, c'est l'écrire sous forme d'une somme. **Factoriser** une expression, c'est l'écrire sous forme d'un produit.

Pour développer ou factoriser une expression, on utilise les formules suivantes.

Proposition 4.4. *Soient k, a et b des nombres réels. On a les égalités suivantes.*

1. $k(a+b) = (a+b)k = ka + kb.$
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$
3. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$
4. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$

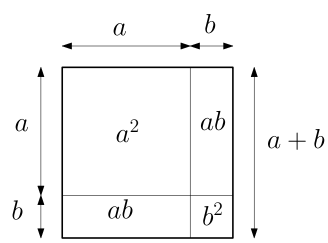
Les trois dernières formules, appelées identités remarquables, découlent de la première. En effet,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b = aa + ba + ab + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a-b)(a+b) = (a-b)a + (a-b)b = a^2 - ba + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Le dessin suivant donne une interprétation géométrique de l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (pour a et b positifs). Le carré ci-dessous a un côté de longueur $(a+b)$. Il a donc pour aire $(a+b)^2$. Il est constitué d'un carré de côté a (d'aire a^2), d'un carré de côté b (d'aire b^2) et de deux rectangles de côtés a et b (chacun d'aire ab). Ainsi, l'aire du grand carré est aussi $a^2 + b^2 + 2ab$ d'où $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.



Exemple 4.5. *Pour développer l'expression $(2x+3)(x-1)$, on utilise la première règle ci-dessus :*

$$(2x+3)(x-1) = (2x+3)x + (2x+3)(-1) = 2x^2 + 3x - 2x - 3 = 2x^2 + x - 3.$$

Pour développer l'expression $(2x+3)^2$, on peut utiliser la deuxième formule ci-dessus

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2.3.2x + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9.$$

Exercice 4.6. Développer les expressions suivantes, où a, b, x et y désignent des nombres réels.

1. $5(x+2)$
2. $\dfrac{b}{3}(x+3)$
3. $(y+3)(x+1)$
4. $(10x+1)^2$
5. $\dfrac{1}{5}(5y-3)^2$
6. $(y-1)(x+1)(x-1)$
7. $(y-1)(x+1)^2$
8. $(a+b)^3$

Exemple 4.7. *On va utiliser les mêmes formules (dans l'autre sens) pour factoriser des expressions. Par exemple, pour factoriser l'expression* $10x^2 - 10$*, on utilise, la première puis la dernière règle :* $10x^2 - 10 = 10(x^2 - 1) = 10(x^2 - 1^2) = 10(x-1)(x+1)$.

Exercice 4.8. Factoriser les expressions suivantes en utilisant les formules de la proposition 4.4.

1. $x^2 + 2x$
2. $x^2 - 4$
3. $x^2 - 2x + 1$
4. $\dfrac{1}{25}x^2 - \dfrac{1}{9}$
5. $xy^2 - 4x$
6. $10x^2 + 20x + 10$

4.3 Équations du second degré

4.3.1 Forme canonique d'un polynôme de degré 2

On appelle polynôme (réel) de degré 2 toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$, où a est un nombre réel non-nul et b et c sont des nombres réels. Écrire un tel polynôme sous forme canonique, c'est trouver des nombres réels λ, α et β de sorte que

$$ax^2 + bx + c = \lambda((x-\alpha)^2 - \beta).$$

Dans le cas où $\beta \geq 0$, la forme canonique permet de factoriser le polynôme. En effet, si $\beta \geq 0$,

$$\lambda((x-\alpha)^2 - \beta) = \lambda((x-\alpha)^2 - (\sqrt{\beta})^2) = \lambda(x - \alpha + \sqrt{\beta})(x - \alpha - \sqrt{\beta}).$$

Exemple 4.9. *Mettons le polynôme* $-3x^2 + 6x + 3$ *sous forme canonique. On commence par factoriser par le coefficient dominant* -3 *:*

$$-3x^2 + 6x + 3 = -3(x^2 - 2x - 1).$$

Ensuite on interprète le terme $-2x$ *comme le double produit d'une identité remarquable que l'on fait apparaître (en ajoutant et en enlevant* 1^2 *dans l'exemple).*

$$\begin{aligned} -3(x^2 - 2x - 1) &= -3(x^2 - 2.1.x + 1^2 - 1^2 - 1) \\ &= -3(x^2 - 2.1.x + 1^2 - 2) \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ *pour obtenir la forme canonique du polynôme.*

$$-3(x^2 - 2.1.x + 1^2 - 2) = -3((x-1)^2 - 2).$$

Enfin, on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ *pour factoriser le polynôme*

$$\begin{aligned} -3((x-1)^2 - 2) &= -3((x-1)^2 - (\sqrt{2})^2) \\ &= -3(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient une factorisation du polynôme

$$-3x^2 + 6x + 3 = -3(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}).$$

Exemple 4.10. *Avec la même méthode, nous allons mettre le polynôme* $x^2 + 4x + 6$ *sous forme canonique.*

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 6 &= x^2 + 2.2.x + 2^2 - 2^2 + 6 \\ &= x^2 + 2.2.x + 2^2 + 2 \\ &= (x+2)^2 + 2. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on n'obtient pas une différence entre deux carrés de réels. On ne peut pas factoriser comme dans le premier exemple (sauf à utiliser des nombres complexes).

Exercice 4.11. Écrire sous forme canonique les polynômes de degré 2 suivants. Si possible, factoriser ces polynômes.

1. $x^2+6x-16$
2. x^2-2x+2
3. $5x^2-30x+45$
4. $10x^2+10x+10$

4.3.2 Équations de degré 1 ou 2

La méthode générale pour résoudre une équation algébrique du second degré est de la réécrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$, puis de mettre ax^2+bx+c sous forme canonique. Ensuite, si l'on peut factoriser ax^2+bx+c sous la forme d'un produit de deux facteurs de degré 1, on peut utiliser la propriété suivante pour se ramener à la résolution d'équations de degré 1.

Proposition 4.12. *Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.*

Exemple 4.13. *On veut résoudre l'équation $-2x^2+3x+6=x^2-3x+3$. En regroupant tout dans le membre de gauche, c'est-à-dire en enlevant x^2-3x+3 aux deux membres de l'équation, l'équation se réécrit*

$$-3x^2+6x+3=0.$$

En utilisant la factorisation du membre de gauche vue dans l'exemple 4.9, l'équation se réécrit

$$-3(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})=0.$$

Enfin, d'après la proposition 4.12, cette équation est vérifiée si et seulement si

$$x-1-\sqrt{2}=0 \text{ ou } x-1+\sqrt{2}=0$$

c'est-à-dire

$$x=1+\sqrt{2} \text{ ou } x=1-\sqrt{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right\}.$$

Exemple 4.14. *Ici, on veut résoudre l'équation $x^2+4x+6=0$. En utilisant la forme canonique obtenue dans l'exemple 4.10, l'équation se réécrit*

$$(x+2)^2+2=0.$$

Mais, pour tout nombre réel x, le nombre réel $(x+2)^2$ est positif car c'est un carré. Ainsi, le nombre $(x+2)^2+2$ est strictement positif donc l'équation n'a pas de solution.

Exercice 4.15. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x+1=3x+5$.
2. $2x+4=2x+5$.
3. $3x^2+6x+9=0$.
4. $x^2+4x+1=-1$.
5. $2x^2+12x+23=3$.
6. $(x-1)(x^2+2x+1)=0$.

Exercice 4.16.

1. Soit $h(t)=(t+5)^2-\frac{49}{4}$. Déterminez les réels t tels que $h(t)=0$. Déterminez les coordonnées du sommet de la parabole (graphe de h) et les coordonnées du point d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées.
2. Soit $h(t)=-(t+3)(t+10)$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h : une parabole. Déterminez les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses. Déterminez les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}$ et les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
3. Soit $h(t)=t^2+4t+3$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h. Déterminez les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses. Déterminez les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}$ et les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
4. Conclusion :
Quelle écriture de h est la plus pratique pour déterminer les points d'intersection de sa représentation graphique (la parabole $\mathcal{C}$) avec l'axe des ordonnées ? Quelle écriture de h est la plus pratique pour déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses ? Quelle écriture de h est la plus pratique pour déterminer les coordonnées du sommet de la parabole $\mathcal{C}$?

4.4 Exercices supplémentaires

Exercice 4.17. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0; \sin x = 1; \sin x = -1; \sin x = \frac{1}{2}; \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. $\cos x = 0; \cos x = 1; \cos x = -1; \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos x = \frac{3}{2}$.

Exercice 4.18. Déterminer l'ensemble des couples de nombre réels (x, y) qui vérifient l'équation $\cos(x) = \cos(y)$. Même question pour l'équation $\cos(x) = \sin(y)$.

Exercice 4.19. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\sin(\frac{x}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \ \ |\sin(nx)| = 1; \ \ 12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2.$$

Exercice 4.20. Soient $a \neq 0$, b et c des nombres réels. Mettre le polynôme $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique. En déduire l'ensemble des solutions réelles de l'équation, d'inconnue x, $ax^2 + bx + c = 0$ et retrouver les formules vues dans le secondaire.

Exercice 4.21. Déterminer dans chacun des cas suivants l'ensemble des nombres réels x qui vérifient la relation proposée.

1. $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.
2. $x^4 + 10x^2 + 16 = 0$.
3. $x^4 + 4x^2 - 5 \geq 0$.
4. $x^4 + 10x^2 + 16 < 0$.
5. $(x^2 + 4x - 3)(x^2 + 5x + 19) = 0$.

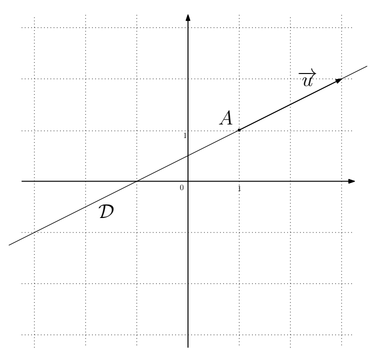
Chapitre 5

Droites du plan

5.1 Droites du plan : définition

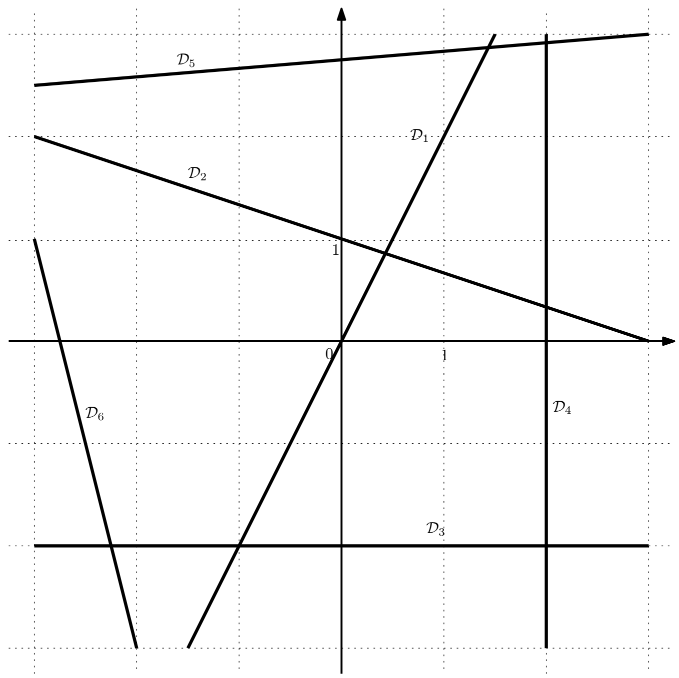
Définition 5.1. Soit A un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan non-nul. La droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$.

Sur la figure suivante, on a représenté la droite passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,1)$.



Plus généralement, on appelle vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur de la forme $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de la droite $\mathcal{D}$. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$, les autres vecteurs directeurs sont les vecteurs de la forme $\lambda \overrightarrow{u}$, où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 5.2. Pour chacune des droites suivantes $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_5$ et $\mathcal{D}_6$, déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de la droite.



Sur le même dessin, tracer la droite passant par le point $A(-1,1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,-1)$ et la droite passant par le point $B(1,-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(1,0)$.

5.2 Équations d'une droite

On munit le plan d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Pour tout point M du plan, on note (x,y) ses coordonnées dans ce repère.

Proposition 5.3. *Tout ensemble du plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ est une droite du plan. Réciproquement, toute droite du plan a une équation de la forme $y = ax + b$, où a et b sont des nombres réels, ou de la forme $x = c$, où c est un nombre réel.*

Remarquer qu'une droite donnée peut avoir plusieurs équations. Ainsi la droite d'équation $y = 3x + 1$ a aussi pour équation $y - 3x - 1 = 0$ ou $2y - 6x - 2 = 0$ ou encore $-y + 3x + 1 = 0$.

Définition 5.4. Si une droite $\mathcal{D}$ du plan a une équation de la forme $y = ax + b$, où a et b sont des réels, on appelle a le *coefficient directeur* de la droite $\mathcal{D}$. Quant au coefficient b il représente l'ordonnée du point d'abscisse 0 de la droite : c'est pourquoi il est appelé ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 5.5. Pour chacune des équations suivantes, déterminer si l'ensemble des solutions est une droite. Si c'est le cas, tracer la droite en question et en donner un point et un vecteur directeur.

1. $y = 2x - 1$
2. $2y + 6x - 3 = 0$
3. $y + x^2 = 0$
4. $4y + x + 4 = -2 + 2x$
5. $x = 9$
6. $xy = 0$
7. $y = -1$

Pour trouver l'équation d'une droite, si la droite en question n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, il s'agit de trouver deux coefficients a et b de sorte que la droite a pour équation $y = ax + b$. Pour trouver a et b, il suffit de trouver les coordonnées de deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ qui appartiennent à cette droite. On a alors un système

$$\begin{cases} y_A &= ax_A + b \\ y_B &= ax_B + b \end{cases}.$$

Ce système permet alors de retrouver les coefficients a et b. Notamment, on peut retrouver a directement en faisant la différence entre les deux lignes du système.

Si la droite en question est parallèle à l'axe des ordonnées, elle a une équation de la forme $x = c$. Il suffit alors de déterminer un point $A(x_A, y_A)$ de cette droite qui aura pour équation $x = x_A$.

Exercice 5.6. Tracer et donner une équation de la droite :

1. Passant par les points $A(0,0)$ et $B(4,2)$
2. Passant par les points $A(1,1)$ et $B(20,10)$
3. Passant par les points $A(1,1)$ et $B(1,20)$.
4. Passant par le point $A(1,2)$ et de vecteur directeur $\overset{\rightarrow}{\text{vd}}\ (-1,1)$
5. Passant par le point $A(2,3)$ et de vecteur directeur $\overset{\rightarrow}{\text{vd}}\ (0,3)$
6. Passant par le point $A(-1,5)$ et de vecteur directeur $\overset{\rightarrow}{\text{vd}}\ (40,40)$

Exercice 5.7. Pour chacune des droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_5$ et $\mathcal{D}_6$ représentées dans l'exercice 5.2, déterminer une équation de la droite.

5.3 Intersections de droites

Deux droites données du plan sont soit parallèles, soit sécantes.

Exercice 5.8. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection entre les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $y = 2x + 3$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $y = -x + 4$.
2. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $2y + x = 3$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $y + 2x = 4$.
3. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $2x + y = 2$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $-2y - 4x = -3$.
4. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $2x + y = 2$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $-2y - 4x = -4$.
5. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par les points $A(1,1)$ et $B(3,2)$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par les points $A'(0,1)$ et $B'(4,2)$.
6. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(1,-1)$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par les points $A'(0,1)$ et $B'(1,0)$.

Exercice 5.9. Dans chacun des cas suivants, résoudre le système et l'interpréter géométriquement.

1. $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y &=& 5 \\ x+3y &=& 3 \end{array}\right.$ 2. $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y &=& 5 \\ 2x+3y &=& 3 \end{array}\right.$ 3. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 5 \\ -x-y &=& 3 \end{array}\right.$

Chapitre 6

Fonctions usuelles et limites

6.1 Fonctions réelles : premières définitions

Nous appellerons **fonction (réelle)** une application $f : D_f \to \mathbb{R}$, où D_f est un sous-ensemble de f appelé le **domaine de définition** de la fonction f.

Exercice 6.1. Déterminer le plus grand domaine de définition sur lequel les fonctions suivantes peuvent être définies :
$f_1(x) = \frac{x-1}{4x^2+4x+1}$; $f_2(x) = \sqrt{x^2+x+1}$; $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$.
$f_4(x) = \ln(x^2-3x)$; $f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+2}$; $f_6(x) = \frac{x}{\exp(x^2)+1}$.

Le **graphe** d'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est le sous-ensemble

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x \in D_f\}\ .$$

6.2 Fonctions usuelles

6.2.1 Fonctions Puissances

Soit $k \in \mathbb{N}$, la fonction puissance est donnée par

$$f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^k \end{array}\ .$$

Son graphe est représenté dans la Figure 6.1.

6.2.2 Fonction Exponentielle

La proposition suivante sera admise :

Proposition 6.2. *Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = f(x)\ \ et\ \ f'(0) = 1\ .$$

*Nous l'appellerons **fonction exponentielle** et noterons $f(x) = \exp(x)$ ou $f(x) = e^x$.*

Le graphe de la fonction exponentielle est représentée dans la Figure 6.2.

Proposition 6.3. *Soit a et b deux réels et k un entier naturel. On a*

1. $e^0 = 1$

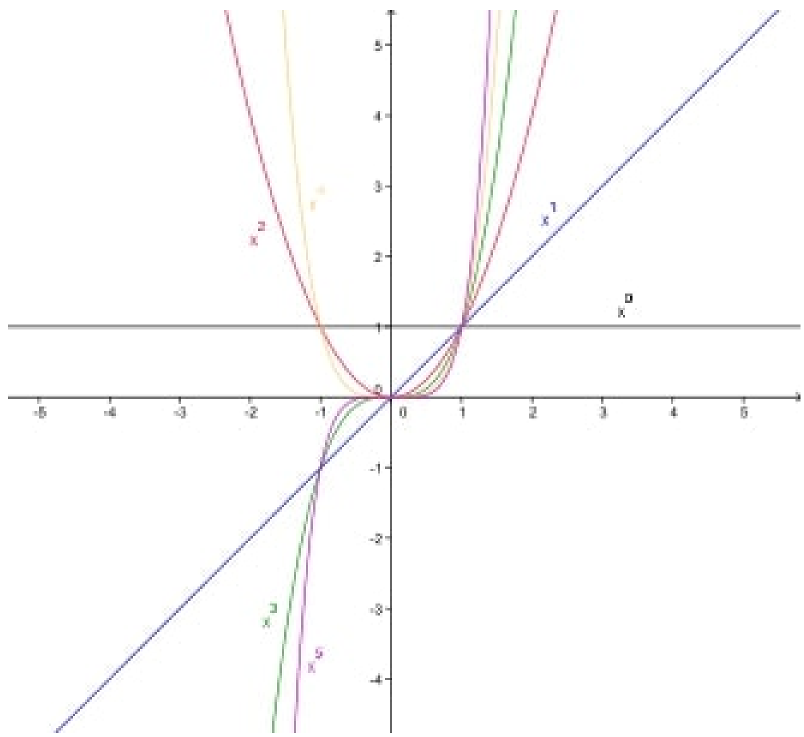


FIGURE 6.1 – Graphe des fonctions puissances

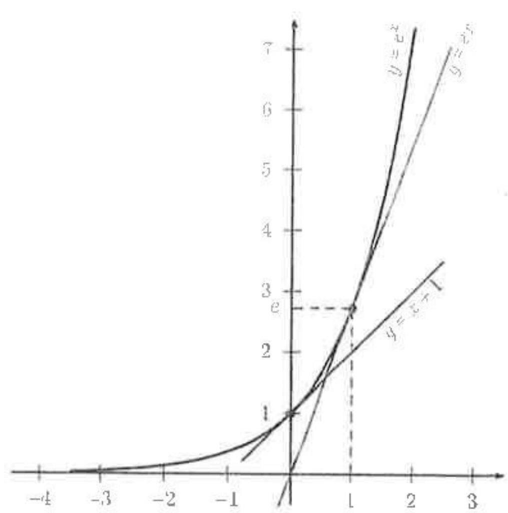


FIGURE 6.2 – Graphe de la fonction exponentielle

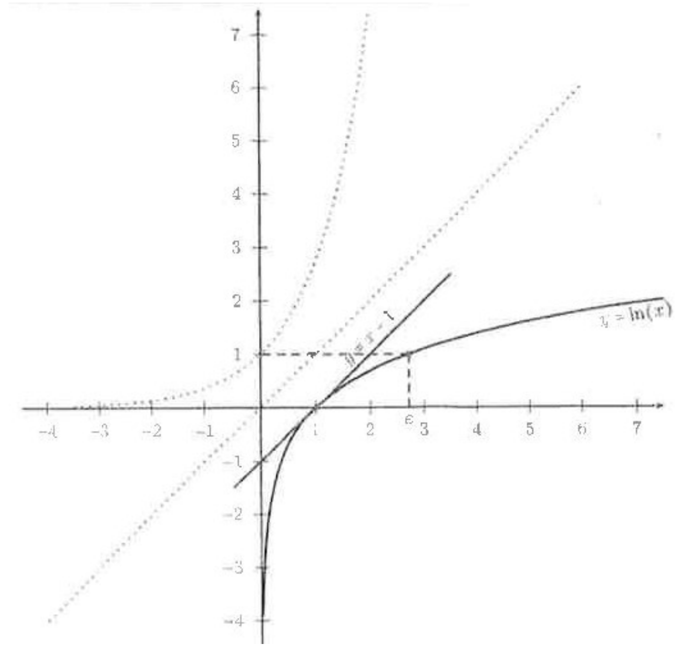


FIGURE 6.3 – Graphe de la fonction logarithme népérien

2. $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
3. $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
4. $(e^a)^k = e^{ka}$
5. $e^1 = e = 2{,}71\ldots$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Exercice 6.4. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^x \times e^{-x}$, $B = e^x + 2e^x$, $C = (e^x)^3 e^{-2x}$, $D = (e^x)^{-2} e^{3x}$, $E = e^{3x+2} \times e^{1-2x}$,
2. $F = \frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$, $G = \frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$, $H = \sqrt{3e^{-x} + 6e^{-x}}$ et $I = \sqrt{\frac{2e^{3x+1}}{e^{2x-1}}}$

6.2.3 Fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle réalise une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, pour tout $x > 0$ l'équation $e^y = x$ possède une unique solution que nous noterons $y = \ln(x)$. La fonction

$$\begin{array}{rccc} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \ln(y) \end{array}$$

est appelée **logarithme népérien**. Son graphe est représenté Figure 6.3.

Proposition 6.5. *Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$. On a*

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
3. $\ln(a^k) = k\ln(a)$
4. $\ln(1) = 0$

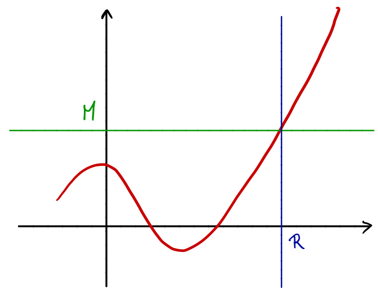


FIGURE 6.4 – $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

5. $\ln(e) = 1$
6. $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
7. $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Exercice 6.6. Calculer $x = \ln 216 - 3(\ln 2 + \ln 3)$ et $y = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln \frac{1}{4}$.

6.3 Limites de fonctions

6.3.1 Limites : définitions

Définition 6.7. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini, et on le note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists R > 0 \text{ tel que si} x > R \text{ alors } f(x) > M\,.$$

Cette définition est illustrée dans la Figure 6.4.
De manière analogue, on peut définir :

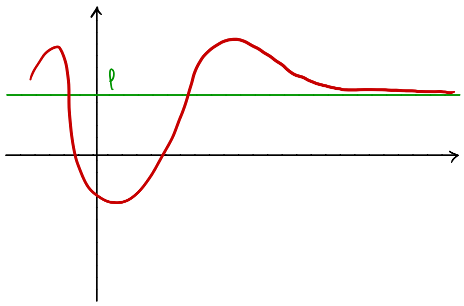
1. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. On parle dans ce cas **d'asymptote horizontale**. Cette limite est illustrée en Figure 6.5a.
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. On parle dans ce cas **d'asymptote verticale**. Cette limite est illustrée en Figure 6.5b.
3. $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

Exercice 6.8. Parmi les fonctions $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{x}$ et $f_4(x) = x^{-2}$, lesquelles ont une représentation graphique qui admet une asymptote horizontale en $+\infty$ ou $-\infty$?

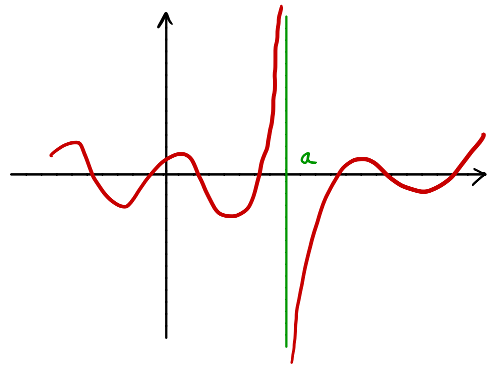
6.3.2 Opérations sur les limites

f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f.g$ a pour limite	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?



(a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$



(b) $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$l > 0$ *ou* $+\infty$	$l < 0$ *ou* $-\infty$	$l > 0$ *ou* $+\infty$	$l < 0$ *ou* $-\infty$	0
g a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$	0^+	0^+	0^-	0^-	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Composée de limites. Soient a, b et c des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Soient f et g deux fonctions.
Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{t \to b} g(t) = c$, alors $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$.

Exercice 6.9. Soient les 3 fonctions suivantes.

$$f_1(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x+2}, \ f_2(x) = 2 - \frac{5}{x^2}, \ f_3(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{1+x}.$$

Déterminer les limites de f_1, f_2 et f_3 en $+\infty$ et $-\infty$. Déterminer la limite de f_1 en -2, la limite de f_2 en 0 et la limite de f_3 en -1.

Exercice 6.10. Déterminer les limites suivantes.
$\lim_{x \to -\infty} (3x^2 - 7x + 5)$, $\lim_{x \to 0, x>0} \frac{2x-3}{x^2+x}$, $\lim_{x \to 0, x<0} \frac{2x-3}{x^2+x}$, $\lim_{x \to 1} \frac{3x+1}{(x-1)^2}$, $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}$.

6.3.3 Comment lever une indétermination

Les **quatre formes indéterminées** sont : $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$.
Une méthode consiste à **mettre le terme prépondérant en facteur.**

Exercice 6.11. Déterminer les limites suivantes :
$\lim_{x \to +\infty} 2x^2 - 3x + 5$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 7}{3x^2 + x + 1}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - x + 5}{x+1}$, $\lim_{x \to -1, x>-1} \frac{4x^2 - x + 5}{x+1}$, $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}$.

6.4 Exercices supplémentaires

Exercice 6.12. Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 3x}$, $\lim_{x \to -\infty} (1 - (x-2)^2)$.

Exercice 6.13. Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \to 0} \cos(x)$, $\lim_{x \to -\infty} \cos(\frac{1}{x})$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin 2x}$.

Exercice 6.14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
$e^{-x} + 1 = 0$; $e^{3x+1} - e^{-x} < 0$; $e^{2x} + 2e^{x} < 3$; $e^{3x} = 4$; $e^{-2x} < 2$.

Exercice 6.15. Dans chacun des cas suivants, déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
$f : x \mapsto e^{3-x}$ sur $\mathbb{R}$; $f : x \mapsto \frac{e^{2x}+2}{e^{x}-1}$ sur $\mathbb{R}^*$, $f : x \mapsto e^{2x} - e^{x} + 1$ sur $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto e^{\frac{1+x^2}{1+x}}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Exercice 6.16. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
$\ln(5-x) > 2\ln(x+1)$; $\ln x = 0$; $(2+x)\ln(x-3) = 0$; $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln(4+2x)$; $\ln x \geq 2\ln 5$; $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 0$; $2^x = 3^{2x+1}$; $(\frac{1}{3})^x = \frac{3}{2}$; $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 \leq 0$

Exercice 6.17. Déterminer les limites suivantes :
$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{3x+5}{x-1}\right)$; $\lim_{x \to -2^+} \ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$; $\lim_{x \to 1^-} \ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$; $\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$; $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$

Exercice 6.18. Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes en 0^+ et en $+\infty$:
$f(x) = \frac{1}{\ln x}$; $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$; $h(x) = \frac{-1}{\ln x - 1}$; $i(x) = (\ln x)^2 - \ln x$.

Chapitre 7

Continuité et dérivabilité

7.1 Continuité

Pour ce cours, nous nous limiterons à la notion intuitive suivante de continuité : si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, un fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **continue** si **on peut tracer son graphe "sans lever le crayon"**.

Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition :

1. $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{R}$,
2. $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{R}^*$,
3. $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,
4. $f(x) = \ln x$ sur $]0, +\infty[$,
5. $f(x) = \exp x$ sur $\mathbb{R}$.
6. $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$.

En additionnant, en multipliant et en quotientant (à condition, de se situer en dehors des points qui annulent le dénominateur) des fonctions continues, on construit de nouvelles fonctions continues.
Exemples. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ et les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

7.2 Dérivabilité

7.2.1 Premières définitions

Définition 7.1. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D_f$.

1. On dit que f **est dérivable en** a si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda \, .$$
Dans ce cas λ est appelé **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$.
2. On dit que f **est dérivable sur** D_f si f est dérivable en tout point de D_f. Dans ce cas, la **fonction dérivée de** f est la fonction
$$f' : \begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} .$$

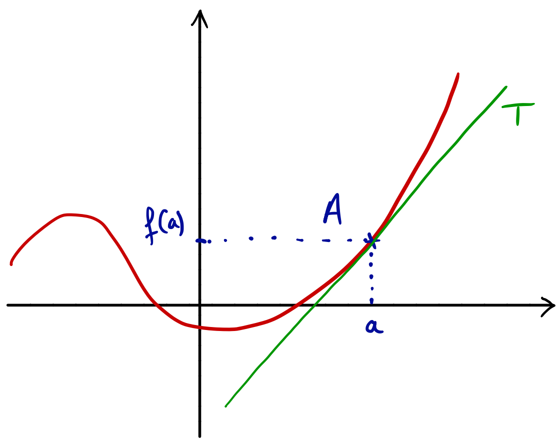
Remarque 7.2. Une fonction dérivable est continue. Cependant, la réciproque est fausse !

7.2.2 Droite tangente

Définition 7.3. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in D_f$, $\mathcal{C}_f$ le graphe de f et $A(a, f(a)) \in \mathcal{C}_f$. La **tangente à** $\mathcal{C}_f$ **en** A est la droite T passant par A et de pente $f'(a)$.

En particulier, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(a, f(a))$ a pour équation

$$y = f'(a)(x - f(a)) + f(a) \ .$$



Exercice 7.4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x+1)^2 + 2$.

1. Calculer $f'(0)$.
2. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(0, 3)$.

7.2.3 Calculs de dérivées

Pour calculer la dérivée d'une fonction à partir de son expression, on se sert le plus souvent des formules et règles suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$g(x) = f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

Proposition 7.5. *Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.*

1. *la fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$,*
2. *la fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$,*
3. *la fonction ku (k est une constante réelle) est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$,*
4. *si $v(x) \neq 0$ sur I, la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$.*
5. *si $v(x) \neq 0$ sur I, la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.*

Exercice 7.6. Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.
$f_1 : x \mapsto \frac{x^2+3x-7}{10}$, $f_2 : x \mapsto x + \sqrt{x}$, $f_3 : x \mapsto \frac{x^2+2x+2}{x^2+x}$, $f_4 : x \mapsto x^2 \cos x$, $f_5(x) = 4xe^x$.

Exercice 7.7. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes en son point d'abscisse a.
$f_1 : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ en $a = 2$; $f_2 : x \mapsto \sqrt{x} + 3$ en $a = 1$; $f_3 : x \mapsto \frac{2x}{x+2}$ en $a = 0$.

7.3 Représentation graphique d'une fonction

Définition 7.8. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

1. f est croissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$. f est décroissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$.
2. f est strictement croissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$. f est strictement décroissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.
3. f est constante sur I ssi $\forall a, b \in I, f(a) = f(b)$.
4. On dit que f est monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I. On dit que f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Proposition 7.9. *Soit f une fonction dérivable sur I.*

1. *Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.*

2. *Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.*

7.3.1 Procédé

Afin de tracer le graphe d'une fonction, on procède ainsi :

1. On précise les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité.
2. Là où c'est possible, on calcule la dérivée f' et on étudie son signe. Ceci indique les variations de la fonction f (on reporte les résultats dans un tableau).
3. On détermine les éventuels extrema de f et la valeur qu'elle y prend.
4. On calcule les limites de f aux bornes du domaine de définition.
5. On détermine les éventuelles asymptotes.
6. On peut aussi calculer, à la main, quelques valeurs simples prises par la fonction f.
7. Puis, on reporte le tout dans un plan muni d'un repère.

Exercice 7.10. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+1}$.

1. Calculez $f'(x)$ pour tout réel $x \in]-1,+\infty[$ et vérifiez que $f'(x)$ a le même signe que $2x^3 - 3x^2 - 1$.
2. On note g la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
   (a) Etudiez les variations de g.
   (b) Prouvez que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]-1,+\infty[$ et que $\alpha \in [1.6; 1.7]$.
   (c) Déduisez-en, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
3. En utilisant les résultats précédents, dressez le tableau de variastions de f.
4. Ecrivez une équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$, courbe représentative de f, au point A d'abscisse 0. Etudiez la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ sur l'intervalle $]-1,1]$.
5. Prouvez que $\mathcal{C}$ est située au-dessus de sa tangente d au point d'abscisse 1.
6. Tracez $\mathcal{C}$, Δ et d.

7.3.2 Exercices supplémentaires.

Exercice 7.11. .
1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. Prouvez que f n'est pas dérivable en zéro.
2) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Prouvez que g n'est pas dérivable en zéro.
3) Soit h telle que $h(x) = 2 - x^2$ si $x < 1$ et $h(x) = \frac{1}{x}$ si $x \geq 1$. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas dérivable en 1.

Exercice 7.12. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :
$i(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$; $j(x) = (x-1)[2\ln(x) + 5]$ sur $I =]0, +\infty[$; $k(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7.13. Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.
$f_1 : x \mapsto \left(\frac{x}{3+2\sqrt{x}}\right)^2$, $f_2(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$,

Exercice 7.14. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à la droite d d'équation $y = -4x + 6$?

Chapitre 8

Calcul intégral

8.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

Choisissons un repère orthogonal (O, I, J). L'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$ où K est le point de coordonnées $(1, 1)$.

Définition 8.1. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie, continue et positive sur $[a, b]$.

1. Le **domaine situé sous la courbe** $\mathcal{C}_f$ est le domaine situé entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

2. L'**intégrale de** a **à** b **de la fonction** f est l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous sa courbe $\mathcal{C}_f$. On la note $\int_a^b f(x)dx$.

Relation de Chasles. Pour tous a, b, c tels que $a \leq b \leq c$, $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Exercice 8.2. 1) Soit la fonction f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = \sqrt{1 - (x-1)^2}$. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[0, 2]$ puis donner la valeur de $\int_0^2 f(x)dx$ sans calcul. 2) Soit la fonction f définie sur $[1, 3]$ par $f(x) = x + 1$. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[1, 3]$ puis déterminer la valeur de $\int_1^3 f(x)dx$ comme l'aire d'un trapèze rectangle.

8.2 Primitives

8.2.1 Définition

Théorème 8.3. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée la fonction f.*

Définition 8.4. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive de** f **sur** I si F est dérivable sur I et que $F' = f$.

Proposition 8.5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et qui admet une primitive F sur I.*

1. *L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble $\{F + C : C \in \mathbb{R}\}$.*
2. *Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.*

Remarque 8.6. Une fonction a une infinité de primitives. La primitive n'est définie qu'à une constante additive près.
Il n'y a unicité de la primitive que si l'on impose une valeur particulière en un point donné de I.

8.2.2 Calculs de primitives

Théorème 8.7. *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.*

fonction f	primitives de f sur I	conditions sur u
$u'u^n (n \in \mathbb{Z}^* \text{ et } n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	lorsque $n < -1, u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$u'v + uv'$	$uv + C$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$	$u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u'e^u$	$e^u + C + C$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$ sur I

8.2.3 Formulaire de primitives

f est définie sur	I	les primitives de f sur I sont
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$kx + C$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$\ln x + C$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$	$\ln(-x) + C$
$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\frac{1}{x} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$

Soient $a > 0$ et b deux réels. Les primitives de $\frac{1}{ax+b}$ sont $\frac{1}{a}\ln(ax+b) + C$ sur $]\frac{-b}{a}, +\infty[$ et sont $\frac{1}{a}\ln(-ax-b) + C$ sur $]-\infty, \frac{-b}{a}[$.
Soient $a \neq 0$ et b deux réels. Les primitives de e^{ax+b} sont $\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.8. Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I vérifiant la condition indiquée.

1. $f(x) = 4x^2 - 3x + 2, I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 0$.
2. $f(x) = 3x + 1 + \frac{1}{x^2}, I =]-\infty, 0[$ et $F(-2) = 1$.
3. $f(x) = (x^2+1)^2, I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 0$.
4. $f(x) = e^{x+1}$ et $F(\ln 2) = 0$.

Exercice 8.9. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto 10e^x + \frac{18x-\pi}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$;
2. $f : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$;
3. $f : x \mapsto \frac{1}{(2x-1)^4}$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$;
4. $f : x \mapsto x^2e^{2x^3}$ sur $\mathbb{R}$;
5. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$;
6. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$ sur $I =]0, +\infty[$

8.3 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

8.3.1 Définition

Définition 8.10. Soit f une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle I. Pour a et b dans I, l'**intégrale de a à b de f**, notée $\int_a^b f(x)dx$ est le nombre réel $F(b) - F(a)$, noté $[F(x)]_a^b$, où F est une primitive de f sur I.

Remarque 8.11. — Dans cette définition, il est important que f soit continue sur $[a, b]$ fermé.

— La lettre x, dite "variable muette", n'a pas d'importance en soi ; on aurait aussi pu écrire $\int_a^b f(t)dt$ ou encore $\int_a^b f(u)du$, etc.

— La primitive que l'on a choisi dans la définition n'importe pas : si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors on a $F_1 - F_2 = C$ où C est une constante, donc $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) + C - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$.

8.3.2 Aire algébrique

Dans un repère orthogonal, $\mathcal{D}$ est le domaine situé entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. **L'aire algébrique** de $\mathcal{D}$ est la somme des portions d'aires comptées positivement lorsque $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de l'axe des abscisses et comptées négativement lorsque $\mathcal{C}_f$ est située au dessous de l'axe des abscisses. Cette aire algébrique est égale à $\int_a^b f(x)dx$.

8.3.3 Propriétés des intégrales pour des fonctions continues de signe quelconque

Proposition 8.12. *1. Si $f = 0$, alors $\int_a^b f(x)dx = 0$;*

2. *Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (mais la réciproque est fausse).*

3. *Si $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.*

4. *L'intégrale est linéaire : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, g sont continues sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b (f + \lambda g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt$$

5. *l'intégrale vérifie la relation de Chasles : si f est continue sur I et que $a, b, c \in I$ (ne vérifiant pas nécessairement $a \leq b \leq c$), alors*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

En particulier, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Théorème 8.13. *Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Soit $\alpha \in [a, b]$. Alors la fonction F définie sur $[a, b]$ par $(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(t)dt$, est la primitive de f sur $[a, b]$, nulle en α.*

Exercice 8.14. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^{-1} (t^2 - 4t + 3)dt$;
2. $\int_0^\pi \cos t dt$;
3. $\int_1^2 (t^2 + t - \frac{1}{t} + \frac{3}{\sqrt{t}})dt$;
4. $\int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$;
5. $\int_0^1 5(e^{x+9} + x^9)dx$;
6. $\int_{-1}^1 \frac{1}{2x+3}dx$,

8.4 Exercices supplémentaires.

Exercice 8.15. Déterminer une primitive sur I pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f : x \mapsto \frac{5}{x^3}$ sur $]0, +\infty[$;
3. $f(x) = 2\sqrt{2x+3}$ sur $]-\frac{3}{2}, +\infty[$;
4. $g(x) = \frac{e^{3x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$,
5. $h(x) = 3xe^{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$,
6. $i(x) = \frac{e^x}{(3e^x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$,
7. $j(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2e^x+1}}$ sur $\mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto \frac{2}{x-1}$ sur $]0, +\infty[$.
9. $g : x \mapsto \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2}$ sur $]0, +\infty[$.
10. $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
11. $k : x \mapsto \frac{\ln 2 - 3\sqrt{x}\ln x}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8.16. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_4^1 \frac{e^{\sqrt{t}-1}}{2\sqrt{t}} dt$,
2. $\int_{-1}^2 |x^2 - 2x| dx$,
3. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t/2) dt$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t/2) dt$ (calculer d'abord $J + K$ et $J - K$).