PERIODE ENJEUX

MATHS0

Portail ST

Faculté des Sciences et Ingénierie

Campus VALROSE

Programme

Le contenu de ce programme se trouve essentiellement dans le programme de la spécialité "Mathématiques" de première générale ainsi que dans le programme de l'option "Mathématiques complémentaires" de terminale générale.
Le premier thème (noté "0") se fera uniquement sur WIMS.
Les 8 thèmes suivants se feront en séances de Cours-TD et en séances WIMS.

0/ 1ers éléments de logique, un peu de vocabulaire de la théorie des ensembles et comment prouver un énoncé
- Fabriquer un énoncé, nier un énoncé
- Théorie des ensembles, symboles, quantificateurs
- Applications, image directe, image réciproque
- Démonstrations directe, par contraposition, par l'absurde

1/ Calculs, fractions, inégalités, valeur absolue, minorants, majorants
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$
- L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Règles de calcul sur les inégalités. La valeur absolue. Majorants et minorants
- Facultatif : Intervalles

2/ Somme et produit finis, factorielle. Raisonnement par récurrence. Somme arithmétique ou géométrique
- Symboles $\sum$, $\prod$ et factorielle
- Raisonnement par récurrence
- Suites arithmétiques et géométriques

3/ Trigonométrie et équations du second degré
- Cosinus et sinus d'un angle. Fonctions cos et sin
- Equations de second degré

Forme canonique d'un polynôme de degré 2. Equations de degré 1 ou 2
- Facultatif : Inéquations de degré 1 ou 2

4/ Droites du plan
- Définition
- Equations d'une droite
- Intersections de droites
- Facultatif : Zones du plan délimitées par des droites
- Facultatif : Plans et droites de l'espace

5/ Limites de fonctions. Fonctions puissances, exponentielle et logarithme
- Limites de fonctions

Les différents types de limites. Opérations sur les limites. Comment lever une indétermination
- Etude et graphe de fonctions usuelles

Fonctions Puissances. Fonction Exponentielle. Fonction Logarithme Népérien

6/ Propriétés des fonctions et de leur représentation graphique
- Ensemble de définition et courbe représentative
- Fonctions continues, fonctions dérivables

Continuité. Dérivabilité, calcul de la dérivée, tangente. Signe de la dérivée et sens de variation de la fonction. Dérivée et extremum

- Facultatif : Fonctions paires, fonctions impaires, fonctions périodiques

7/ Etude de fonctions et représentation graphique de fonctions

- Convexité et point d'inflexion
- Exemple d'etude détaillée de fonctions

8/ Calcul intégral

- Intégrale d'une fonction continue et positive
- Notion de primitives
- Calculs de primitives
- Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque
- Propriétés des intégrales pour des fonctions continues de signe quelconque

1 Thème 1 : Calculs, fractions, inégalités, valeur absolue, minorants, majorants

1.1 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

On note $\mathbb{N}$ l'**ensemble des entiers naturels** (c'est à dire les nombres positifs sans chiffre après la virgule) : $0, 1, 2, 3, \ldots$
On note $\mathbb{Z}$ l'**ensemble des entiers relatifs**, c'est-à-dire des entiers positifs ou négatifs. Cet ensemble contient $\mathbb{N}$ mais aussi les nombres $-1, -2, -3, \ldots$.
On note $\mathbb{Q}$ l'**ensemble des rationnels**, c'est-à-dire l'ensemble des fractions $\frac{p}{q}$, où p est un entier relatif et q est un entier relatif non-nul.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

$\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$. Un nombre rationnel admet une écriture fractionnaire canonique (unique) appelée la forme irréductible qui est obtenue lorsque le PGCD des numérateur et dénominateur est 1 (càd qu'ils sont premiers entre eux) et que l'on décide (par exemple) de choisir le dénominateur dans $\mathbb{N}^*$.
On note $\mathbb{R}$ l'**ensemble des réels**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres de partie décimale quelconque. Cet ensemble contient l'ensemble $\mathbb{Q}$ mais certains nombres, comme $\sqrt{2}$, sont des réels mais n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$. Un tel nombre, qui appartient à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{Q}$, est dit **irrationnel**.

Exercice 1.1. Calculer et simplifier "au maximum" ces expressions :

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3}, \qquad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}, \qquad \frac{10}{x} - \frac{7}{2x}, \qquad \frac{1+x}{2-x} + \frac{5}{2-x}, \qquad \frac{1+x}{2-x} + \frac{1}{1-x}.$$

Exercice 1.2. Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}, \qquad \frac{2x^2}{x-3} : \frac{8}{x^3 - 3x^2}, \qquad \frac{1}{a} - \frac{a}{a^2-1} + \frac{2a+1}{a^3-a}.$$

1.2 L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

1.2.1 Règles de calcul sur les inégalités

1. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$,
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall k > 0$, si $a < b$, alors $ka < kb$,
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall k < 0$, si $a < b$, alors $ka > kb$,
4. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $0 \leq a < b$ et $0 \leq c < d$, alors $0 \leq ac < bd$,
5. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $a < b \leq 0$ et $c < d \leq 0$, alors $0 \leq bd < ac$.
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$).
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$).

Exercice 1.3. Dans chacun des cas suivants, déterminer **sans calculatrice** lequel des deux nombres proposés est le plus grand.

1. $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{3}$.
2. $\frac{7}{12}$ et $\frac{5}{7}$.
3. $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
4. $\sqrt{3}$ et 2.
5. $2 + \sqrt{3}$ et 4.
6. $\sqrt{2}$ et $\frac{3}{2}$.
7. $\sqrt{5}$ et $\frac{7}{3}$.
8. $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$ et 3.
9. $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$ et $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$.

Exercice 1.4. Encadrer :

1. $\frac{x+1}{2x+3}$ pour $x \in [0,2]$.
2. $\sqrt{2x+1}$ pour $x \in [1,2]$
3. $\frac{1}{4x+5}$ pour $x \in [-1,5]$
4. $(x+2)(x-10)$ pour $x \in [3,5]$
5. $3x^2 - 2x + 4$ pour $x \in]-2,5[$
6. $\frac{1}{x-2}$ pour $x \in]-3,3[$

Exercice 1.5. Encadrer :

1. $\frac{x+1}{2x+2}$ pour $x \in [0,2]$
2. $\frac{x+2}{x-10}$ pour $x \in [3,5]$
3. $x^2 - 8x - 20$ pour $x \in [3,5]$.
4. $(5x+3)^2$ pour $x \in [0,2]$ puis pour $x \in [-1,1]$

1.2.2 La valeur absolue

Sur $\mathbb{R}$, on appelle valeur absolue l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{lcll} |\, x \,| & = & x & \text{si } x \geq 0 \\ |\, x \,| & = & -x & \text{si } x < 0 \end{array} .$$

Ainsi, si a et b sont deux nombres réels, $|a-b|$ représente la distance entre a et b sur l'axe réel.

1.2.3 Majorants et minorants

Définition 1.1. *Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dira que E est* **majoré** *(respectivement* **minoré***) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que pour tout $x \in E$ on ait $x \leq M$ (resp. $x \geq m$).*
Un élément M vérifiant la propriété ci dessus s'appelle un majorant de E (resp. m s'appelle un minorant de E).
Un ensemble qui est à la fois majoré et minoré est dit **borné***.*

Exemple 1.1. *L'intervalle $A =]-\infty, 1[$ est majoré, mais il n'est pas minoré. Les nombres 5, π, 2, 1 sont des majorants de A. Il en existe une infinité d'autres. L'ensemble A ne possède aucun minorant.*
$B = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ n'admet ni minorant, ni majorant.
$C = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ n'admet aucun majorant et admet une infinité de minorants.

Définition 1.2. *Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dira que E possède un maximum s'il existe $M \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \leq M$. On dira que E possède un minimum s'il existe $m \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \geq m$.*

ATTENTION : La différence fondamentale entre cette définition et la précédente porte sur le fait que le majorant M appartient ou pas à l'ensemble E. Par exemple, l'ensemble $A = [0,1]$ possède un maximum et un minimum : $\max(A) = 1$ et $\min(A) = 0$. Par contre, l'ensemble $B = [0,1[$ n'a pas de maximum (bien qu'il soit borné).

Exercice 1.6. (i) Dessiner les ensembles A, B et C suivants

$$A = \{x \in \mathbb{R}, |x| < 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq \sqrt{2}\} \quad \text{et} \quad C = \{x \in \mathbb{R}, |x-2| \geq -2\}.$$

(ii) Dans la liste suivante, quels sont les majorants (resp. minorants) de A, B et C ?

$$-5,\ -2,\ 0,\ 1,\ 5,\ 7,\ 10$$

(iii) Dessiner l'ensemble $D = A \cap B$. Dans la liste suivante, quels sont les majorants (resp. minorants) de D ?

$$-5,\ -2,\ 0,\ 1,\ 5,\ 7,\ 10$$

1.3 Notions et exercices supplémentaires

Exercice 1.7. Mettre sous forme irréductible les fractions suivantes (sans calculatrice !).

$$\frac{4}{2}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{5}{15}, \quad \frac{20}{36}, \quad \frac{30}{28}, \quad \frac{75}{315}, \quad \frac{3600}{144}, \quad \frac{3150}{3780}.$$

Exercice 1.8. Calculer et écrire sous forme irréductible :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{7}-\frac{1}{5}, \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{6}, \quad \frac{2}{\frac{5}{6}}, \quad \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}, \quad \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}},$$

Exercice 1.9. Soit x, y tels que $-4 < x < -2$ et $8 < y < 10$. Donnez un encadrement de $x-y$, xy et de $-\sqrt{x^2}$.

Exercice 1.10. Vrai ou faux ?

1. Pour que $x^2 > 10000$, il suffit que $x > 100$.
2. Pour que $x^2 > 10000$, il faut que $x > 100$.
3. Pour que $x > 100$, il suffit que $x^2 > 10000$.
4. Pour que $x > 100$, il faut que $x^2 > 10000$.
5. Pour que $\frac{1}{x} > 100$, il suffit que $x < 10^{-2}$.
6. Pour que $5x^2 + \frac{10}{x} > 100$, il suffit que $x < -5$.
7. Pour que $5x^2 + \frac{10}{x} > 100$, il faut que $x < -5$.
8. Soient a et b deux réels. Pour que $a+b < 1$, il faut que $a < \frac{1}{2}$ et $b < \frac{1}{2}$.
9. L'ensemble des réels x tels que $\frac{1}{x} < 1$ est l'intervalle $]1, +\infty[$.
10. Pour tout entier naturel n, l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x} > 10^n$ est l'intervalle $]10^{2n}, +\infty[$.

Exercice 1.11. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $|x-2| \leq 3$
2. $|3-x| \leq 4$
3. $|x-1| \leq -\sqrt{2}$
4. $\mid x-5 \mid + \mid x+1 \mid < 8$

Exercice 1.12. Dans chacun des cas suivants, dites si l'ensemble considéré est majoré, minoré. Déterminez si l'ensemble possède un maximum, un minimum.

$$E_1 =]0,1], \ E_2 = \mathbb{N}, \ E_3 = [0, +\infty[, E_4 = \{x \in \mathbb{Q}, \ x^2 \leq 2\}.$$

Exercice 1.13. Montrer que $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ et que $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$. En déduire une formule analogue pour $\max(x,y,z)$.

Intervalles

Définition 1.3. *On appelle* intervalle fermé *de* $\mathbb{R}$ *tout sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *de l'une des formes suivantes.*

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \ [a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \ ]-\infty;a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \ \mathbb{R} \text{ ou } \emptyset,$$

où $a < b$ *sont des nombres réels. On appelle* intervalle ouvert *de* $\mathbb{R}$ *tout sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *de l'une des formes suivantes.*

$$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \ ]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \ ]-\infty;a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \ \mathbb{R} \text{ ou } \emptyset,$$

où $a < b$ *sont des nombres réels. Enfin, on appelle* intervalle *de* $\mathbb{R}$ *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *qui est un intervalle ouvert, un intervalle fermé ou un ensemble de l'une des formes suivantes*

$$[a;b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \ ]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

où $a < b$ *sont des nombres réels.*

Exercice 1.14. Écrire sous forme d'intervalle (ou de réunion d'intervalles) les sous ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

1. $A = \{x \in \mathbb{R},\ -1 < x \leq \sqrt{2}\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R},\ 2 \leq x < 5 \text{ et } 6 \leq x < 7\}$
3. $C =]-5, \pi] \cap [2, 18[$
4. $D = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 4\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 9\}$

2 Thème 2 : Somme et produit finis, factorielle. Raisonnement par récurrence. Somme arithmétique ou géométrique

2.1 Symboles $\sum$, $\prod$ et factorielle

Notons $n_0 \leq n_1$ des entiers relatifs et $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_1}$ des nombres réels. On note

$$\sum_{i=n_0}^{n_1} x_i = x_{n_0} + x_{n_0+1} + \ldots + x_{n_1}.$$

Par exemple, $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$.
Noter que le i qui apparait dans la formule ci-dessus est une variable muette : on aurait pu la remplacer par n'importe quelle autre lettre. Par exemple

$$\sum_{k=0}^{3} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = \sum_{i=0}^{3} i^2.$$

Par convention, une somme vide est égale à 0. Par exemple $\displaystyle\sum_{k=0}^{-1} k = 0$, puisqu'il n'y a pas d'indice k plus grand que 0 et plus petit que -1.

Exercice 2.1. (i) Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{4} i, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{3} k, \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{10} 1, \qquad S_4 = \sum_{i=1}^{n} 3, \qquad S_5 = \sum_{i=-2}^{3} (i+2), \qquad S_6 = \sum_{i=0}^{3} (i+1)^2.$$

(ii) Ecrire les additions suivantes en utilisant le symbole $\sum$ (sans les calculer) :

$S = 100 + 101 + 102 + \ldots + 199 + 200, \quad T = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{55} + \frac{1}{60}$

$R = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 38 + 40, \quad U = 3 + 9 + 15 + 21 + \ldots + 39 + 45$

(iii) Voici une table de données statistiques :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	-1	5	2	-2	5	2	1	3	4

Calculer :

$$T_1 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2, \qquad T_2 = \sum_{i=1}^{10} i x_i, \qquad T_3 = \sum_{i=1}^{5} 2x_{2i}.$$

Soient $n_0 \leq n$ des entiers relatifs et $u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_n$ des nombres réels. Les sommes de la forme

$$\sum_{k=n_0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$$

sont dites télescopiques. En effet, si l'on écrit cette somme en extension, tous les termes se simplifient sauf u_{n+1} et u_{n_0}.

Par exemple,

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{7}(\sqrt{i+1}-\sqrt{i}) &= (\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})+(\sqrt{8}-\sqrt{7}) \\ &= -\sqrt{2}+(\sqrt{3}-\sqrt{3})+(\sqrt{4}+-\sqrt{4})+(\sqrt{5}-\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{6})+(\sqrt{7}-\sqrt{7})+\sqrt{8}.\end{aligned}$$

Finalement $\sum_{i=2}^{7}(\sqrt{i+1}-\sqrt{i}) = \sqrt{8}-\sqrt{2}$.

Exercice 2.2. Calculer les sommes téléscopiques A et B suivantes :

$$A = \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right), \qquad B = \sum_{k=1}^{99}\left[(k+1)^3-k^3\right].$$

La notation $\prod$ est l'équivalent de la notation $\sum$ pour les produits. Notons $n_0 \leq n_1$ des entiers relatifs et $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_1}$ des nombres réels. On note

$$\prod_{i=n_0}^{n_1} x_i = x_{n_0} \times x_{n_0+1} \times \ldots \times x_{n_1}.$$

Par exemple, $\prod_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 \times 2^2 \times 3^2$. Par convention, un produit vide est égal à 1.

Enfin, pour un entier n, on appelle factorielle n et on note $n!$ le nombre

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Par exemple, on a $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. D'après la convention sur le produit vide, on a $0! = 1$.

Exercice 2.3. Calculer les produits suivants :

$$A = \prod_{i=1}^{3}(2i), \qquad B = 4!, \qquad C = 5!, \qquad D = \frac{5!}{4!}, \qquad E = \frac{4!}{5!}, \qquad F = \prod_{k=1}^{11}\frac{k+2}{k+3}, \qquad G = \prod_{k=1}^{3}\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

2.2 Raisonnement par récurrence

Notons $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n. Fixons un entier naturel n_0.

Nous souhaitons montrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. Pour cela le principe du raisonnement par récurrence (généralisée), consiste à suivre la procédure suivante :
1) (initialisation) vérifions que $P(n_0)$ est vraie,
2) (hérédité) Soit n un entier quelconque tel que $n \geq n_0$. Supposons que $P(k)$ est vraie pour tout entier $n_0 \leq k \leq n$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

L'idée intuitive de ce raisonnement est la suivante. Comme la propriété $P(n_0)$ est vraie, alors la propriété $P(n_0+1)$ est vraie par hérédité. Mais cette même propriété d'hérédité implique alors que la propriété $P(n_0+2)$ est vraie, donc la propriété $P(n_0+3)$ aussi et ainsi de suite. Ainsi, on obtient de proche en proche que, pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

Exemple 2.1. ***Suites arithmétiques.*** *Soient a un nombre réel et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombres réels tels que, pour tout entier $n \geq n_0$:*

$$u_{n+1} = u_n + a.$$

On va montrer par récurrence sur n que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a la propriété $P(n)$ suivante

$$P(n) \quad u_n = u_{n_0} + (n-n_0)a.$$

Initialisation. *Si $n = n_0$, on a bien $u_{n_0} = u_{n_0} + (n_0 - n_0)a$. La propriété $P(n_0)$ est donc vraie.*

Hérédité. *Supposons que pour un entier $n \geq n_0$, on a la propriété $P(n)$, c'est-à-dire*

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0)a.$$

Montrons la propriété $P(n+1)$, c'est-à-dire

$$u_{n+1} = u_{n_0} + (n + 1 - n_0)a.$$

Par hypothèse, on a $u_{n+1} = u_n + a$. Par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$

$$u_{n+1} = (u_{n_0} + (n - n_0)a) + a,$$

d'où la propriété $P(n+1)$.

On a donc démontré que, pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

Exercice 2.4.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 1,\ 2^n \geq n$.
2. **Suites géométriques.** Soient q un nombre réel et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels tels que, pour tout entier $n \geq n_0$:
$$u_{n+1} = qu_n.$$
Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier $n \geq n_0$,
$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
4. Soit q un nombre réel distinct de 1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
Développer directement l'expression $(1-q)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ pour trouver une autre démonstration de cette formule.

Exercice 2.5. Calculer les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=20}^{100} (k+1),\ S_2 = \sum_{k=1}^{100} (5k+3),\ S_3 = \sum_{k=20}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k,\ S_4 = \sum_{k=1}^{100} 5 \times 10^k,\ S_5 = \sum_{k=1}^{20} (2 \times 2^k + 3k + 4).$$

2.3 Exercices supplémentaires

Exercice 2.6. Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$
Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et en déduire une nouvelle démonstration de la formule ci-dessus.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

4. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1, +\infty[, \quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 2.7. Soient a et b deux réels. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right).$$

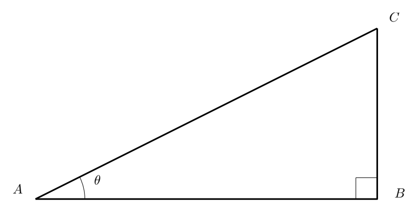
Que retrouve-t-on dans le cas où $a = 1$?

3 Thème 3 : Trigonométrie et équations du second degré

3.1 Cosinus et sinus d'un angle

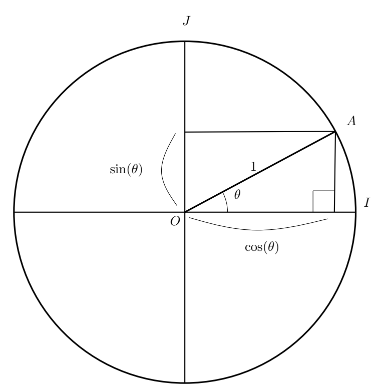
Rappelons la définition du radian, unité de mesure des angles plans.
Considérons un secteur angulaire, formé de deux droites concourantes distinctes, et un cercle de rayon r tracé dans un plan contenant ces deux droites, dont le centre est le point d'intersection des droites. Alors, la valeur de l'angle en radians est le rapport entre la longueur L de l'arc de cercle intercepté par les droites et le rayon r.

Rappelons les définitions du cosinus et du sinus vues au collège. Soit ABC un triangle rectangle en B. Notons θ l'angle du triangle en A (exprimé en radians).



Alors le cosinus de θ est $\cos(\theta) = \dfrac{AB}{AC}$ et le sinus de θ est $\sin(\theta) = \dfrac{BC}{AC}$. Autrement dit, $\cos(\theta)$ est le quotient de la longueur du côté adjacent à A par la longueur de l'hypothénuse du triangle rectangle et $\sin(\theta)$ est le quotient de la longueur du côté adjacent à A par la longueur de l'hypothénuse du triangle rectangle.

Le cercle trigonométrique (ou cercle unité) $\mathcal{C}$ est le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ (identifié au plan de coordonnées (xOy) muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$) constitué des points à une distance 1 de l'origine : le cercle de centre O et de rayon 1.



Soit $\theta \in [0, \pi/2]$ un angle. Soit A le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \theta$ en radian. Sur le dessin ci-dessus, on voit apparaître un triangle rectangle dont l'hypoténuse a pour longueur 1. Par conséquent, $\cos(\theta)$ est l'abscisse du point A et $\sin(\theta)$ est son ordonnée.

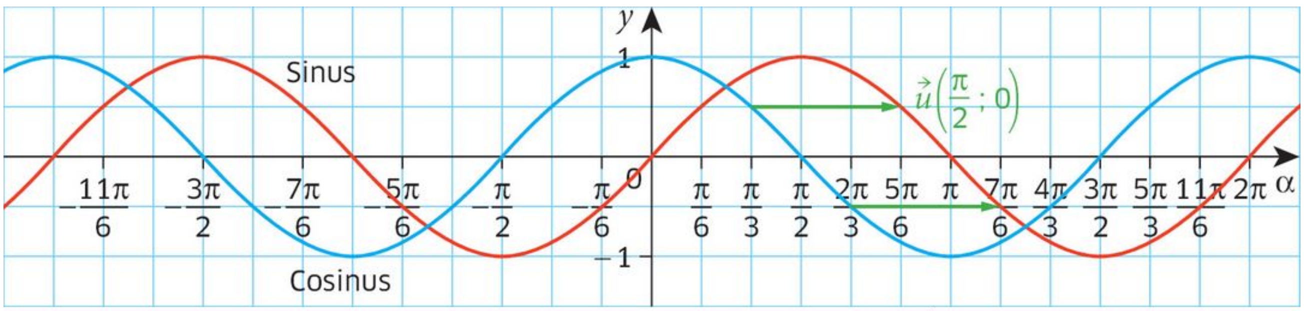
Par extension, à tout réel θ, nous associons l'unique point M_θ du cercle trigonométrique obtenu de la manière suivante : on attache un fil de longueur $|\theta|$ au point $(1,0)$, puis on enroule ce fil le long du cercle trigonométrique dans le sens inverse des aiguilles d'une montre si $\theta \geq 0$ (respectivement dans le sens des aiguilles d'une montre si $\theta \leq 0$). Le point d'arrivée du fil est le point M_θ. $\cos(\theta)$ est alors l'abscisse du point M_θ et $\sin(\theta)$ est son ordonnée, dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
θ est une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_\theta})$.
Et pour finir, on peut remarquer qu'à tout point du cercle trigonométrique, correspond une infinité de mesures d'angle possibles, qui diffèrent toutes d'un multiple entier relatif de 2π (périmètre du cercle trigonométrique).

Les propriétés suivantes se déduisent immédiatement des définitions du sinus et du cosinus :
* $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (qui traduit le fait que $OA^2 = 1$).

* $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ (conséquence de la formule précédente).
* $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$, $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$.

Voici des valeurs remarquables du cosinus et du sinus (à connaître) et leurs représentations graphiques

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Exercice 3.1. En représentant les angles suivants sur le cercle trigonométrique et en utilisant les valeurs remarquables ci-dessus, déterminer les valeurs suivantes du cosinus et du sinus.

1. $\cos(\frac{2\pi}{3})$, $\sin(\frac{2\pi}{3})$.
2. $\cos(\frac{3\pi}{4})$, $\sin(\frac{3\pi}{4})$.
3. $\cos(\frac{5\pi}{6})$, $\sin(\frac{5\pi}{6})$.
4. $\cos(\frac{-\pi}{6})$, $\sin(\frac{-\pi}{6})$.
5. $\cos(\frac{-\pi}{4})$, $\sin(\frac{-\pi}{4})$.
6. $\cos(\frac{-\pi}{3})$, $\sin(\frac{-\pi}{3})$.
7. $\cos(\frac{-2\pi}{3})$, $\sin(\frac{-\pi}{3})$.
8. $\cos(\frac{-3\pi}{4})$, $\sin(\frac{-3\pi}{4})$.
9. $\cos(\frac{-5\pi}{6})$, $\sin(\frac{-5\pi}{6})$.

Exercice 3.2. On considère un triangle ABC rectangle en B (comme sur le dessin au début du thème). Dans chacun des cas suivants, calculer la longueur exacte demandée. Les mesures des angles sont en radians et les mesures des longueurs en centimètres.

1. AB sachant que $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$ et $AC = 5$.
2. BC sachant que $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$ et $AC = 4$.
3. AC sachant que $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ et $AB = 8$.
4. AC sachant que $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ et $BC = 3$.

Exercice 3.3. On fixe un angle x. A l'aide du cercle trigonométrique, exprimer les quantités suivantes en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

1. $\cos(-x)$
2. $\sin(-x)$
3. $\cos(\pi + x)$
4. $\sin(\pi + x)$
5. $\cos(\pi - x)$
6. $\sin(\pi - x)$
7. $\cos(\frac{\pi}{2} + x)$
8. $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$.

3.2 Équations du second degré

3.2.1 Forme canonique d'un polynôme de degré 2

On appelle polynôme (réel) de degré 2 toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$, où a est un nombre réel non-nul et b et c sont des nombres réels. Écrire un tel polynôme sous forme canonique, c'est trouver des nombres réels λ, α et β de sorte que

$$ax^2 + bx + c = \lambda((x - \alpha)^2 - \beta).$$

Dans le cas où $\beta \geq 0$, la forme canonique permet de factoriser le polynôme. En effet, si $\beta \geq 0$,

$$\lambda((x - \alpha)^2 - \beta) = \lambda((x - \alpha)^2 - (\sqrt{\beta})^2) = \lambda(x - \alpha + \sqrt{\beta})(x - \alpha - \sqrt{\beta}).$$

Exemple 3.1. *Mettons le polynôme $-3x^2+6x+3$ sous forme canonique. On commence par factoriser par le coefficient dominant -3 :*

$$-3x^2+6x+3=-3(x^2-2x-1).$$

Ensuite on interprète le terme $-2x$ comme le double produit d'une identité remarquable que l'on fait apparaître (en ajoutant et en enlevant 1^2 dans l'exemple).

$$\begin{aligned} -3(x^2-2x-1) &= -3(x^2-2.1.x+1^2-1^2-1) \\ &= -3(x^2-2.1.x+1^2-2) \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise l'identité remarquable $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ pour obtenir la forme canonique du polynôme.

$$-3(x^2-2.1.x+1^2-2)=-3((x-1)^2-2).$$

Enfin, on utilise l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ pour factoriser le polynôme

$$\begin{aligned} -3((x-1)^2-2) &= -3((x-1)^2-(\sqrt{2})^2) \\ &= -3(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient une factorisation du polynôme

$$-3x^2+6x+3=-3(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}).$$

Exemple 3.2. *Avec la même méthode, nous allons mettre le polynôme x^2+4x+6 sous forme canonique.*

$$\begin{aligned} x^2+4x+6 &= x^2+2.2.x+2^2-2^2+6 \\ &= x^2+2.2.x+2^2+2 \\ &= (x+2)^2+2. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on n'obtient pas une différence entre deux carrés de réels. On ne peut pas factoriser comme dans le premier exemple (sauf à utiliser des nombres complexes).

Exercice 3.4. Écrire sous forme canonique les polynômes de degré 2 suivants. Si possible, factoriser ces polynômes.

1. $x^2+6x-16$
2. x^2-2x+2
3. $5x^2-30x+45$
4. $10x^2+10x+10$

3.2.2 Équations de degré 1 ou 2

La méthode générale pour résoudre une équation algébrique du second degré est de la réécrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$, puis de mettre ax^2+bx+c sous forme canonique. Ensuite, si l'on peut factoriser ax^2+bx+c sous la forme d'un produit de deux facteurs de degré 1, on peut utiliser la propriété suivante pour se ramener à la résolution d'équations de degré 1.

Proposition 3.1. *Un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.*

Exemple 3.3. *On veut résoudre l'équation $-2x^2+3x+6=x^2-3x+3$. En regroupant tout dans le membre de gauche, c'est-à-dire en enlevant x^2-3x+3 aux deux membres de l'équation, l'équation se réécrit*

$$-3x^2+6x+3=0.$$

En utilisant la factorisation du membre de gauche vue dans l'exemple 3.1, l'équation se réécrit

$$-3(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})=0.$$

Enfin, d'après la proposition 3.1, cette équation est vérifiée si et seulement si

$$x-1-\sqrt{2}=0 \text{ ou } x-1+\sqrt{2}=0$$

c'est-à-dire

$$x=1+\sqrt{2} \text{ ou } x=1-\sqrt{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right\}.$$

Exemple 3.4. *Ici, on veut résoudre l'équation $x^2 + 4x + 6 = 0$. En utilisant la forme canonique obtenue dans l'exemple 3.2, l'équation se réécrit*

$$(x + 2)^2 + 2 = 0.$$

Mais, pour tout nombre réel x, le nombre réel $(x+2)^2$ est positif car c'est un carré. Ainsi, le nombre $(x+2)^2+2$ est strictement positif donc l'équation n'a pas de solution.

Exercice 3.5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x + 1 = 3x + 5$.
2. $2x + 4 = 2x + 5$.
3. $3x^2 + 6x + 9 = 0$.
4. $x^2 + 4x + 1 = -1$.
5. $2x^2 + 12x + 23 = 3$.
6. $(x - 1)(x^2 + 2x + 1) = 0$.

Exercice 3.6.

1. Soit $h(t) = (t+5)^2 - \frac{49}{4}$. Déterminez les réels t tels que $h(t) = 0$. Déterminez les coordonnées du sommet de la parabole (graphe de h) et les coordonnées du point d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées.
2. Soit $h(t) = -(t + 3)(t + 10)$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h : une parabole. Déterminez les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses. Déterminez les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}$ et les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
3. Soit $h(t) = t^2+4t+3$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h. Déterminez les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses. Déterminez les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}$ et les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
4. Conclusion :
   Quelle écriture de h est la plus pratique pour déterminer les points d'intersection de sa représentation graphique (la parabole $\mathcal{C}$) avec l'axe des ordonnées ? Quelle écriture de h est la plus pratique pour déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses ? Quelle écriture de h est la plus pratique pour déterminer les coordonnées du sommet de la parabole $\mathcal{C}$?

3.3 Notions et exercices supplémentaires

Exercice 3.7. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0; \sin x = 1; \sin x = -1; \sin x = \frac{1}{2}; \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. $\cos x = 0; \cos x = 1; \cos x = -1; \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos x = \frac{3}{2}$.

Exercice 3.8. Déterminer l'ensemble des couples de nombre réels (x, y) qui vérifient l'équation $\cos(x) = \cos(y)$. Même question pour l'équation $\cos(x) = \sin(y)$.

Exercice 3.9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\sin(\frac{x}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad |\sin(nx)| = 1; \quad 12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2.$$

Exercice 3.10. Soient $a \neq 0$, b et c des nombres réels. Mettre le polynôme $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique. En déduire l'ensemble des solutions réelles de l'équation, d'inconnue x, $ax^2 + bx + c = 0$ et retrouver les formules vues dans le secondaire.

Exercice 3.11. Déterminer dans chacun des cas suivants l'ensemble des nombres réels x qui vérifient la relation proposée.

1. $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.
2. $x^4 + 10x^2 + 16 = 0$.
3. $x^4 + 4x^2 - 5 \geq 0$.
4. $x^4 + 10x^2 + 16 < 0$.
5. $(x^2 + 4x - 3)(x^2 + 5x + 19) = 0$.

Exercice 3.12.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + ax + b)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 = 1$.

3. Déterminer deux réels a et b tels que $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x^2 + ax + b)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 2x^2 - 5x = 6$.

Inéquations de degré 1 ou 2

La méthode générale pour résoudre une inéquation du second degré est de la mettre sous la forme $ax^2+bx+c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ de mettre le polynôme $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique puis, lorsque c'est possible, de le factoriser.

Exemple 3.5. *Résolvons l'inéquation* $-3x^2 + 6x + 3 \geq 0$. *En utilisant la factorisation du membre de gauche vue dans l'exemple 3.1, l'inéquation se réécrit*

$$-3(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) \geq 0.$$

On effectue alors un tableau de signe pour obtenir le signe de $P(x) = -3x^2 + 6x + 3$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de -3		$-$		$-$		$-$	
Signe de $x-1-\sqrt{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x-1+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation considérée est donc $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$.

Avec ce même tableau de signe on voit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x^2 + 6x + 3 < 0$ *est* $]-\infty, 1 - \sqrt{2}[\cup]1 + \sqrt{2}, +\infty[$.

Exemple 3.6. *Ici, on veut résoudre l'inéquation* $x^2 + 4x + 6 \geq 0$. *En utilisant la forme canonique obtenue dans l'exemple 3.2, l'équation se réécrit*

$$(x+2)^2 + 2 \geq 0.$$

Comme pour tout nombre réel x, *la quantité* $(x+2)^2$ *est positive, alors, pour tout nombre réel* x, $(x+2)^2 + 2 \geq 2 \geq 0$. *L'ensemble des solutions de l'inéquation considérée est donc* $\mathbb{R}$.

Exercice 3.13. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des nombres réels x qui vérifient l'inéquation.

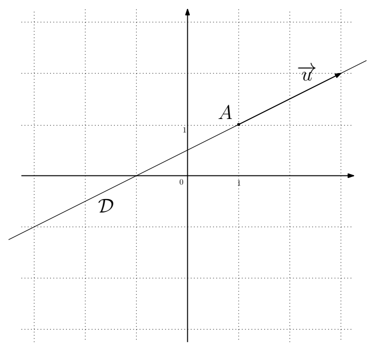
1. $3x + 4 < x + 6$.
2. $3x + 4 \geq x + 6$.
3. $2x + 1 < 2x + 3$.
4. $(x-2)(x+18) < 0$.
5. $2x^2 + 8x + 2 \geq 0$.
6. $2x^2 + 8x + 2 \leq 0$.
7. $x^2 + 2x + 1 \leq 0$.
8. $x^2 + 3x < -2$.

4 Thème 4 : Droites du plan

4.1 Droites du plan : définition

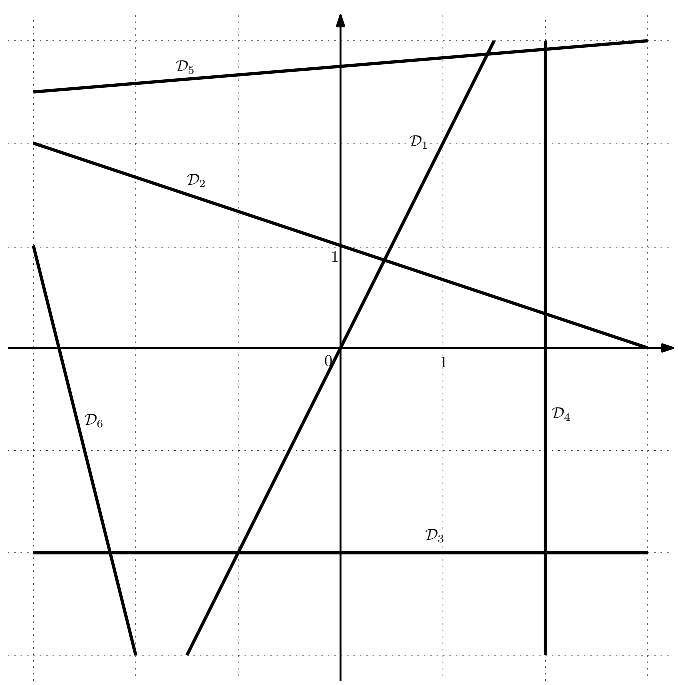
Définition 4.1. *Soit A un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan non-nul. La droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}$.*

Sur la figure suivante, on a représenté la droite passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,1)$.



Plus généralement, on appelle vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur de la forme $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de la droite $\mathcal{D}$. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$, les autres vecteurs directeurs sont les vecteurs de la forme $\lambda\overrightarrow{u}$, où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 4.1. Pour chacune des droites suivantes $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_5$ et $\mathcal{D}_6$, déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de la droite.



Sur le même dessin, tracer la droite passant par le point $A(-1,1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,-1)$ et la droite passant par le point $B(1,-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(1,0)$.

4.2 Équations d'une droite

On munit le plan d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Pour tout point M du plan, on note (x, y) ses coordonnées dans ce repère.

Proposition 4.1. *Tout ensemble du plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ est une droite du plan. Réciproquement, toute droite du plan a une équation de la forme $y = ax + b$, où a et b sont des nombres réels, ou de la forme $x = c$, où c est un nombre réel.*

Remarquer qu'une droite donnée peut avoir plusieurs équations. Ainsi la droite d'équation $y = 3x + 1$ a aussi pour équation $y - 3x - 1 = 0$ ou $2y - 6x - 2 = 0$ ou encore $-y + 3x + 1 = 0$.

Définition 4.2. *Si une droite $\mathcal{D}$ du plan a une équation de la forme $y = ax + b$, où a et b sont des réels, on appelle a le* coefficient directeur *de la droite $\mathcal{D}$. Quant au coefficient b il représente l'ordonnée du point d'abscisse 0 de la droite : c'est pourquoi il est appelé ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$.*

Exercice 4.2. Pour chacune des équations suivantes, déterminer si l'ensemble des solutions est une droite. Si c'est le cas, tracer la droite en question et en donner un point et un vecteur directeur.

1. $y = 2x - 1$
2. $2y + 6x - 3 = 0$
3. $y + x^2 = 0$
4. $4y + x + 4 = -2 + 2x$
5. $x = 9$
6. $xy = 0$
7. $y = -1$

Pour trouver l'équation d'une droite, si la droite en question n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, il s'agit de trouver deux coefficients a et b de sorte que la droite a pour équation $y = ax + b$. Pour trouver a et b, il suffit de trouver les coordonnées de deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ qui appartiennent à cette droite. On a alors un système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_A & = & ax_A + b \\ y_B & = & ax_B + b \end{array} \right. .$$

Ce système permet alors de retrouver les coefficients a et b. Notamment, on peut retrouver a directement en faisant la différence entre les deux lignes du système.

Si la droite en question est parallèle à l'axe des ordonnées, elle a une équation de la forme $x = c$. Il suffit alors de déterminer un point $A(x_A, y_A)$ de cette droite qui aura pour équation $x = x_A$.

Exercice 4.3. Tracer et donner une équation de la droite :

1. Passant par les points $A(0,0)$ et $B(4,2)$
2. Passant par les points $A(1,1)$ et $B(20,10)$
3. Passant par les points $A(1,1)$ et $B(1,20)$.
4. Passant par le point $A(1,2)$ et de vecteur directeur $\vec{\text{vd}}\ (-1,1)$
5. Passant par le point $A(2,3)$ et de vecteur directeur $\vec{\text{vd}}\ (0,3)$
6. Passant par le point $A(-1,5)$ et de vecteur directeur $\vec{\text{vd}}\ (40,40)$

Exercice 4.4. Pour chacune des droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_5$ et $\mathcal{D}_6$ représentées dans l'exercice 4.1, déterminer une équation de la droite.

4.3 Intersections de droites

Soient deux droites données du plan. Elles sont sécantes si elles n'ont qu'un seul point commun.
Elles sont parallèles si elles ne sont pas sécantes.
Dans ce dernier cas, les droites sont alors soient égales (ou confondues : elles ont tous leurs points en commun), soient strictement parallèles (sans aucun point commun).

Exercice 4.5. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection entre les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $y = 2x + 3$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $y = -x + 4$.

2. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $2y + x = 3$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $y + 2x = 4$.
3. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $2x + y = 2$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $-2y - 4x = -3$.
4. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $2x + y = 2$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $-2y - 4x = -4$.
5. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par les points $A(1,1)$ et $B(3,2)$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par les points $A'(0,1)$ et $B'(4,2)$.
6. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(1,-1)$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par les points $A'(0,1)$ et $B'(1,0)$.

Exercice 4.6. Dans chacun des cas suivants, résoudre le système et l'interpréter géométriquement.

1. $\begin{cases} 3x + 2y &= 5 \\ x + 3y &= 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x + 2y &= 5 \\ 2x + 3y &= 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y &= 5 \\ -x - y &= 3 \end{cases}$

Exercice 4.7.
1. Ecrire une équation de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par le point $A(3,-2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(-1,5)$.
2. Ecrire une équation de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par le point $B(-3,2)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $8x - 3y + 6 = 0$.
3. Ecrire une équation de la droite $\mathcal{D}_3$ passant par le point $C(9,5/2)$ et parallèle à la droite d'équation $2x - 7y = 0$.
4. Ecrire une équation de la droite $\mathcal{D}_4$ passant par le point $D(-1,2)$ et de pente égale à $-5/3$.
5. Précisez un vecteur directeur et la pente de chacune des droites précédentes.
6. Tracez toutes ces droites dans un même repère.

4.4 Notions et exercices supplémentaires

Zones du plan délimitées par des droites

Exercice 4.8. Pour chacune des inéquations suivantes, déterminer l'ensemble des solutions et le dessiner.

1. $y \geq 2x - 1$
2. $2y + 6x - 3 < 0$
3. $4y + x + 4 \leq -2 + 2x$
4. $x > 9$
5. $y \leq -1$

Exercice 4.9. Tracer les ensembles de solutions des équation/inéquations suivantes.

1. $xy = 0$
2. $0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq -x + 6$
3. $y \leq -2x + 1, \quad y \geq -2x - 1, \quad x \geq 0$
4. $xy > 0$
5. $xy \geq 0$
6. $x + 2y + 3 \geq 0, \quad y - x + 3 \geq 0$
7. $x \geq 0, y \geq 2x + 1, \quad y \leq -x + 1$
8. $7(x - 2y)(y + x) \geq 0$.

Plans et droites de l'espace

L'espace de dimension 3 est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$. La définition de la notion de droite dans l'espace est très similaire à la définition dans le cas du plan.

Définition 4.3. *Soit A un point de l'espace (de dimension 3) et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace non-nul. La droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}$.*

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace : La représentation paramétrique suivante des droites de l'espace découle directement de la définition. Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$

et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(x_u, y_u, z_u)$. Alors la droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points de l'espace $M(x,y,z)$ tels qu'il existe un paramètre réel λ tel que

$$\begin{cases} x &= x_A + \lambda x_u \\ y &= y_A + \lambda y_u \\ z &= z_A + \lambda z_u \end{cases}.$$

Cette représentation paramétrique n'est pas unique.

Avant de définir ce qu'est un plan dans l'espace, on a besoin de rappeler la définition suivante.

Définition 4.4. *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si l'un d'entre eux est nul ou il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{u}$.*

Définition 4.5. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace* non colinéaires *et A un point de l'espace. On appelle plan passant par A et de base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'ensemble des points M de l'espace tels que il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda_1.\overrightarrow{u} + \lambda_2.\overrightarrow{v}$.*

Pour déterminer une base d'un plan, il suffit de trouver trois points non-alignés A, B et C de ce plan. La famille de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ forme alors une base du plan $\mathcal{P}$.

On admettra le théorème suivant qui est l'analogue d'une représentation cartésienne des droites du plan par une équation.

Théorème 4.1. *Les plans de l'espace de dimension 3 sont les sous-ensembles de l'espace qui ont une équation de la forme $ax + by + cz = d$, avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $d \in \mathbb{R}$.*

Cette représentation n'est pas unique.

Exercice 4.10. Déterminer un point et une base des plans suivants donnés par une équation.

1. Le plan d'équation $-x + y - z = 2$.
2. Le plan d'équation $y - 2z = 0$.
3. Le plan d'équation $x = 3$.

Exercice 4.11. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersections de la droite $\mathcal{D}$ avec le plan $\mathcal{P}$.

1. La droite $\mathcal{D}$ passe par le point $A(1,1,1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,1,0)$ et le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $x + y + z = 0$.
2. La droite $\mathcal{D}$ passe par le point $A(-1,1,-2)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,1,1)$ et le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $2x - y - z = 0$.

Exercice 4.12. Dans chacun des cas suivants, en utilisant la définition de la notion de plan, déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$. En résolvant le système en les paramètres λ_1 et λ_2 obtenus, en déduire une équation du plan $\mathcal{P}$.

1. Le plan $\mathcal{P}$ passe par le point $A(1,-2,0)$ et a pour base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, avec $\overrightarrow{u}(1,1,0)$ et $\overrightarrow{v}(-1,2,0)$.
2. Le plan $\mathcal{P}$ passe par le point $A(1,-2,0)$ et a pour base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, avec $\overrightarrow{u}(1,1,1)$ et $\overrightarrow{v}(2,1,-3)$.

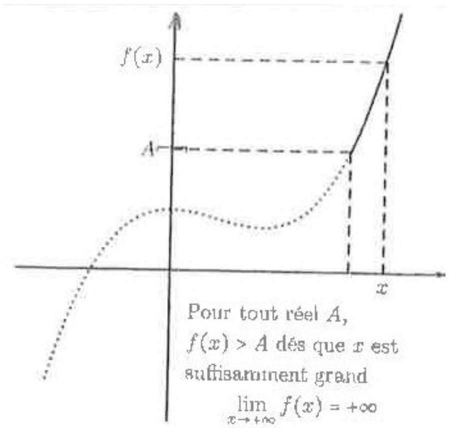
5 Thème 5 : Limites de fonctions. Fonctions puissances, exponentielle et logarithme

5.1 Limites de fonctions

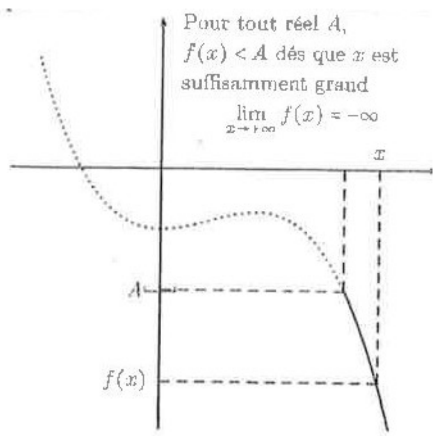
5.1.1 Limite infinie en l'infini

Définition 5.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$.*

1) On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si

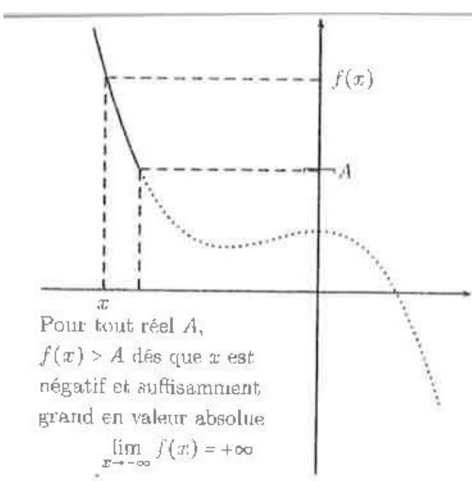


2) On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si

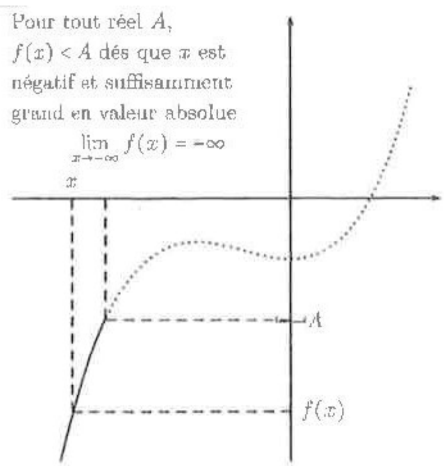


Définition 5.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, \alpha[$ ou $]-\infty, \alpha]$.*

1) On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si



2) On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si

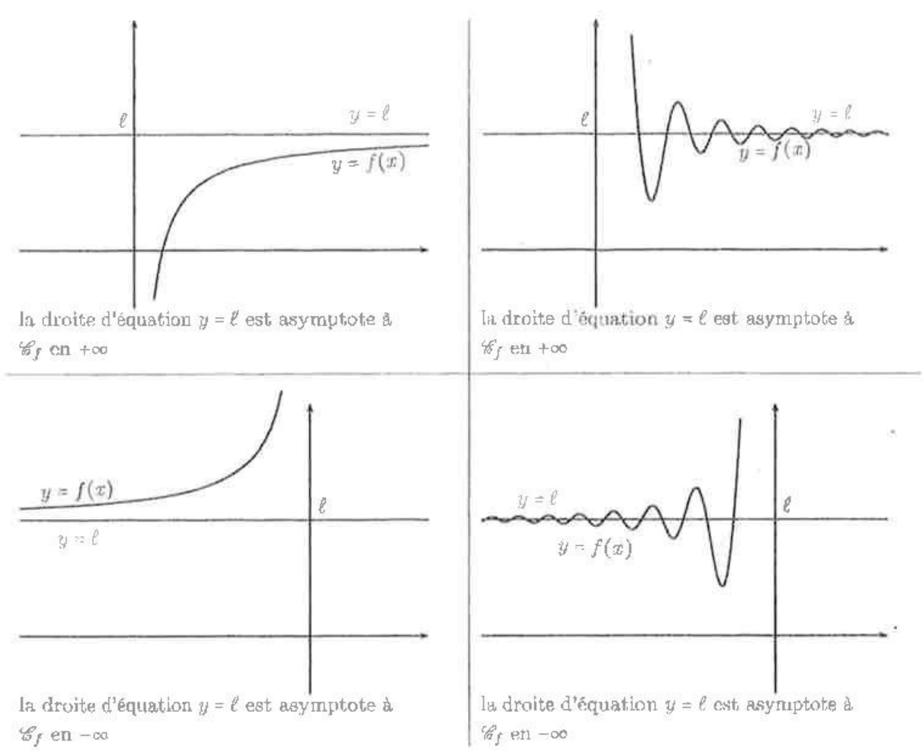


Exemple 5.1. *1) les fonctions* $\exp, \ln, \sqrt{\cdot}$ *tendent vers $+\infty$ en $+\infty$;*
2) un polynôme a la même limite en $\pm\infty$ que son terme de plus haut degré.

5.1.2 Limite réelle en l'infini

Définition 5.3. *1) Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$ et l un réel. On dit que $f(x)$ tend vers le réel l lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $|f(x) - l|$ peut être rendu aussi petit que l'on souhaite lorsque x devient "assez grand". On écrit alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.*
2) Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, \alpha[$ ou $]-\infty, \alpha]$ et l un réel.
On dit que $f(x)$ tend vers le réel l lorsque x tend vers $-\infty$ si et seulement si $|f(x) - l|$ peut être rendu aussi petit que l'on souhaite lorsque x tend vers $-\infty$. On écrit alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$.

Droite asymptote parallèle à l'axe des abscisses
1) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.
2) Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

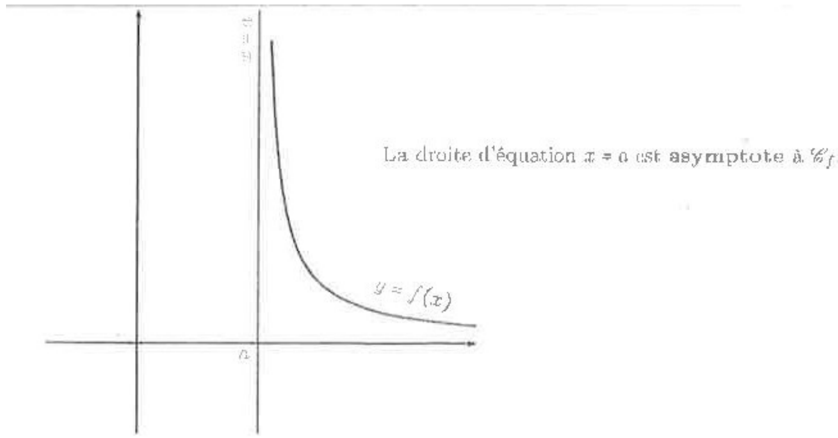


Exercice 5.1. Parmi les fonctions $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{x}$ et $f_4(x) = x^{-2}$, lesquelles ont une représentation graphique qui admet une asymptote horizontale en $+\infty$ ou $-\infty$?

5.1.3 Limite infinie en un réel

Définition 5.4. *Soit a un réel. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant un intervalle de la forme $]a-b, a[$, $b \in]0, +\infty[$, ou un intervalle de la forme $]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$, ou même contenant $]a-b, a[\cup]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$.*
1) On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si et seulement si tout intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$, contient $f(x)$ dès que x est dans D et suffisamment proche de a. On écrit alors $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.
2) On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$, $A \in \mathbb{R}$, contient $f(x)$ dès que x est dans D et suffisamment proche de a. On écrit alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Droite asymptote parallèle à l'axe des ordonnées
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f.



5.1.4 Limite réelle en un réel

Définition 5.5. *Soient a et l deux réels. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant un intervalle de la forme $]a-b, a[$, $b \in]0, +\infty[$, ou un intervalle de la forme $]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$, ou même contenant $]a-b, a[\cup]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$.*
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a si et seulement si $|f(x) - l|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut lorsque x est dans D et est suffisamment proche de a. On écrit alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
$\lim\limits_{x \to a, x > a} f(x) = l$ est la limite à droite de f en a, que l'on note aussi $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$
et $\lim\limits_{x \to a, x < a} f(x) = l$ est la limite à gauche de f en a, que l'on note aussi $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$.

Remarque 5.1. Les limites à droite et à gauche peuvent ne pas coïncider.
La limite d'une fonction en un point, ou en l'infini, n'existe pas toujours. Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par la droite, et vers $-\infty$ quand x tend vers 0 par la gauche : elle n'a donc pas de limite définie en 0, même si elle a une limite à gauche et une limite à droite.

5.1.5 Opérations sur les limites

f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f.g$ a pour limite	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$l>0$ *ou* $+\infty$	$l<0$ *ou* $-\infty$	$l>0$ *ou* $+\infty$	$l<0$ *ou* $-\infty$	0
g a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$	0^+	0^+	0^-	0^-	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Composée de limites. Soient a, b et c des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Soient f et g deux fonctions.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{t\to b} g(t) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Exercice 5.2. Soient les 2 fonctions suivantes.

$$f_1(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x+2},\ f_2(x) = 2 - \frac{5}{x^2}.$$

Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions f_1 et f_2 en $+\infty$ et $-\infty$. Déterminer, si elles existent, la limite de f_1 en -2 et la limite de f_2 en 0.

Exercice 5.3. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes.
$\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2 - 7x + 5)$, $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \frac{2x-3}{x^2+x}$, $\lim\limits_{x\to 0, x<0} \frac{2x-3}{x^2+x}$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x+1}{(x-1)^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}$.

5.1.6 Comment lever une indétermination

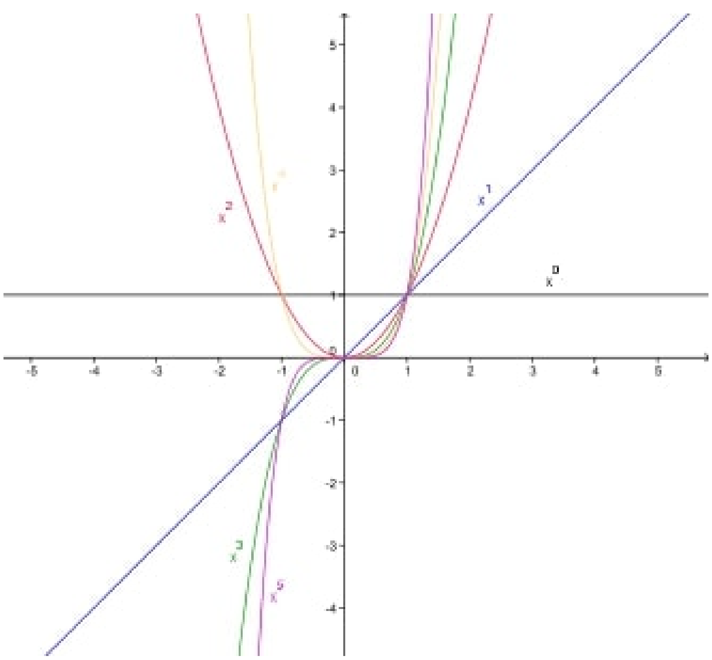
Les **quatre formes indéterminées** sont : $+\infty - (+\infty)$, $-\infty - (-\infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$.

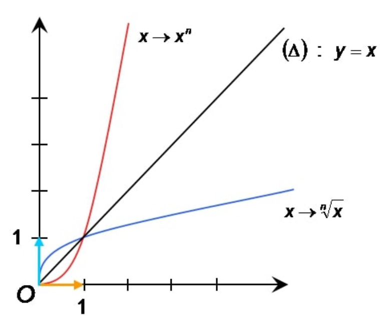
Une méthode consiste à **mettre le terme prépondérant en facteur.**

Exercice 5.4. Déterminer les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 - 3x + 5$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+7}{3x^2+x+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2-x+5}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to-1, x>-1} \frac{4x^2-x-5}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}$.

5.2 Etude et graphe de fonctions usuelles

5.2.1 Fonctions Puissances





5.2.2 Fonction Exponentielle

Définition 5.6. *L'exponentielle réelle, notée* exp*, est l'unique fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$*, telle que* $(\exp)'(x) = \exp(x)$ *et* $\exp(0) = 1$.

Relations fonctionnelles : Pour tous réels a et b et tout entier relatif n
$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$, $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$ et $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

Propriété 5.1. $\exp x > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

Notations. $\exp(x) = e^x$, où $\exp(1) = e$.

Exercice 5.5. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^x \times e^{-x}$, $B = e^x + 2e^x$, $C = (e^x)^3 e^{-2x}$, $D = (e^x)^{-2} e^{3x}$, $E = e^{3x+2} \times e^{1-2x}$,
2. $F = \frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$, $G = \frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$, $H = \sqrt{3e^{-x} + 6e^{-x}}$ et $I = \sqrt{\frac{2e^{3x+1}}{e^{2x-1}}}$

Exercice 5.6. Dans chacun des cas suivants, déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
$f : x \mapsto e^{3-x}$ sur $\mathbb{R}$; $f : x \mapsto \frac{e^{2x}+2}{e^x - 1}$ sur $\mathbb{R}^*$, $f : x \mapsto e^{2x} - e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto e^{\frac{1+x^2}{1+x}}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5.2.3 Fonction Logarithme Népérien

Définition 5.7. *La fonction logarithme népérien, notée* $\ln$, *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *qui à tout réel* $x > 0$ *associe l'unique solution de l'équation* $e^y = x$ *d'inconnue* y. *On note* $y = \ln x$.

Relations fonctionnelles : Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$.
Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n \ln a$

Propriété 5.2. *La fonction* $\ln$ *est une bijection de* $\mathbb{R}^{*+}$ *dans* $\mathbb{R}$ *; c'est la réciproque de la fonction exponentielle.*
Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$. *Et pour tout réel* x, $\ln(e^x) = x$.
$\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.
$\ln$ *est strictement croissante et dérivable sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *(voir chapitre suivant).*
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \ln x = -\infty$.

Lien avec les puissances et l'exponentielle : Pour tous $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b = e^{b \ln a}$.

Croissance comparée. Pour tout entier naturel n non nul, on a

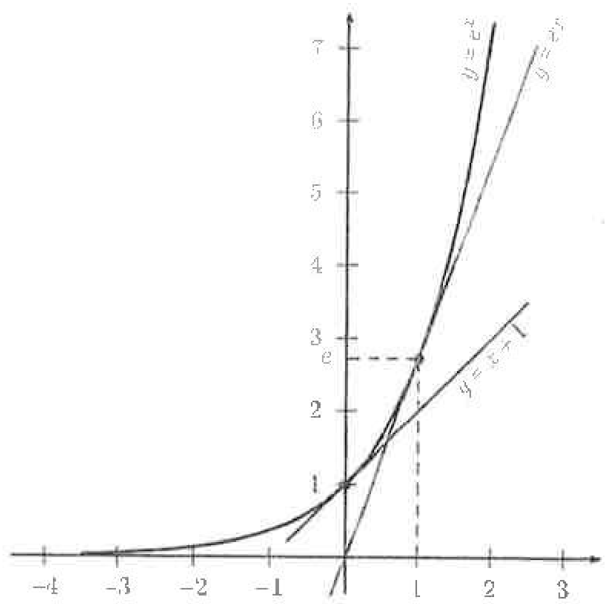
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0.$$

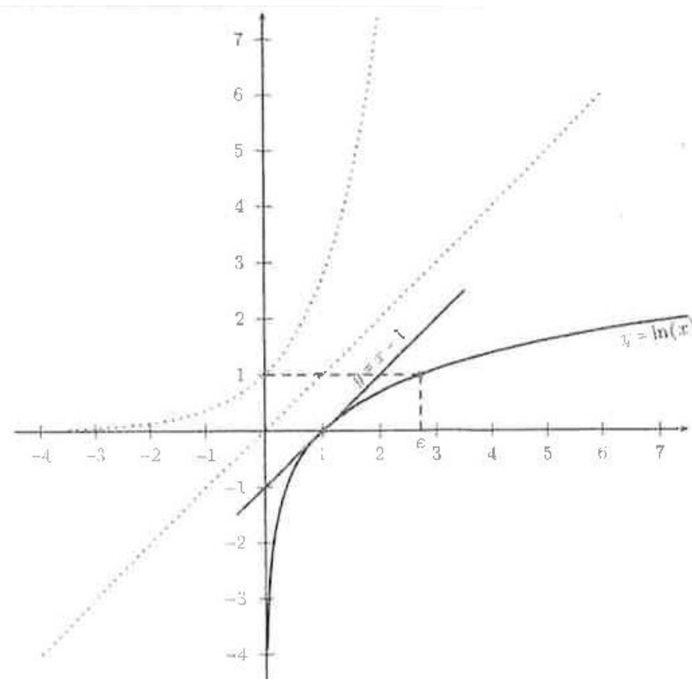
Exercice 5.7. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:
$\frac{1}{2} \ln 16$; $\ln \frac{1}{2}$; $\ln 36 - 2 \ln 3$; $2 \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $\ln 21 + 2 \ln 14 - 3 \ln 0{,}875$.

Exercice 5.8. Calculer $x = \ln 216 - 3(\ln 2 + \ln 3)$ et $y = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2 \ln 10 - \ln \frac{1}{4}$.

Exercice 5.9. Déterminer les limites suivantes :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{3x+5}{x-1}\right)$; $\lim\limits_{x \to -2^+} \ln\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)$; $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\dfrac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$

Voici respectivement les graphes des fonctions exponentielle et logarithme népérien





5.3 Notions et exercices supplémentaires

Exercice 5.10. Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-(x-2)^2)$.

Exercice 5.11. Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos(\dfrac{1}{x})$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sin 2x}$.

Exercice 5.12. Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x-2}$. Montrer graphiquement (en translatant la fonction $f(x) = 1/x$) que $\lim\limits_{x\to 2, x>2} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2, x<2} g(x) = -\infty$.

Une autre méthode pour lever une indétermination, consiste à **utiliser la quantité conjuguée : parfois en présence de radicaux, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée.**
Par exemple l'expression conjuguée de $\sqrt{x+1}-1$ est $\sqrt{x+1}+1$.

Exercice 5.13. Déterminer les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x+1}+x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$, $\lim\limits_{x\to 2, x>2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Exercice 5.14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
$e^{-x}+1=0$; $e^{3x+1}-e^{-x}<0$; $e^{2x}+2e^x<3$; $e^{3x}=4$; $e^{-2x}<2$.

Exercice 5.15. Simplifiez les écritures suivantes :
$3^{-\frac{1}{\ln 3}}$, $(0,25)^{-1,5}$, $e^{2+\ln 8}$, $\sqrt{3}\sqrt[4]{3^6}$; $\frac{\sqrt{x}\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}, x>0$; $x^{\frac{1}{3}}(\sqrt[4]{x})^{-\frac{1}{3}}, x>0$; $(a^{2x})(a^{-x})^3$, où $a>0$ et x réel.

Exercice 5.16. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
$\ln(5-x) > 2\ln(x+1)$; $\ln x = 0$; $(2+x)\ln(x-3) = 0$; $\ln(x-2)+\ln(x+2) = \ln(4+2x)$; $\ln x \geq 2\ln 5$; $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 0$; $2^x = 3^{2x+1}$; $(\frac{1}{3})^x = \frac{3}{2}$; $4^x - 5\cdot 2^x + 6 \leq 0$

Exercice 5.17. Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes en 0^+ et en $+\infty$:
$f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$; $h(x) = \dfrac{-1}{\ln x - 1}$; $i(x) = (\ln x)^2 - \ln x$.

Exercice 5.18. Démontrer que, dans chacun des cas suivants, la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses :
1) $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. 2) $f : x \mapsto \dfrac{2-3x}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

6 Thème 6 : Propriétés des fonctions et de leur représentation graphique

6.1 Ensemble de définition et courbe représentative

Définition 6.1. *Soit f une fonction. Le* **domaine de définition** *de la fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.*

Exemple 6.1. *1) Pour définir le quotient de deux fonctions, il faut que celle qui se trouve au dénominateur ne s'annule jamais. L'ensemble de définition de $f_1(x) = \frac{x-1}{4x+1}$ est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1/4\}$.*
2) Pour définir la racine $\sqrt{f}$ d'une fonction f, il faut que f soit toujours positive ou nulle. L'ensemble de définition de $f_2(x) = \sqrt{x+1}$ est donc $[-1, +\infty[$.
3) Pour définir le logarithme népérien $\ln(f)$ d'une fonction f, il faut que f soit toujours strictement positive. L'ensemble de définition de $f_3(x) = \ln(x-3)$ est donc $]3, +\infty[$.

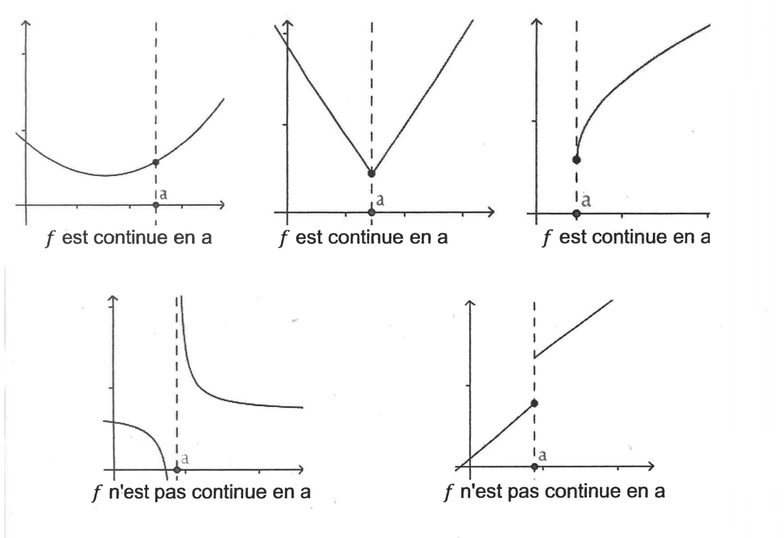
Exercice 6.1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
$f_1(x) = \dfrac{x-1}{4x^2+4x+1}$; $f_2(x) = \sqrt{x^2+x+1}$; $f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$.
$f_4(x) = \ln(x^2-3x)$; $f_5(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}+2}$; $f_6(x) = \dfrac{x}{\exp(x^2)+1}$.

Définition 6.2. *Le plan est rapporté à un repère (souvent orthonormé) $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*
Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$. La **courbe représentative** *$\mathcal{C}_f$ de f ou plus simplement le* **graphe** *de f est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un réel de la partie I. Une équation de ce graphe est $y = f(x)$, $x \in I$.*

6.2 Fonctions continues, fonctions dérivables

6.2.1 Continuité

Les fonctions continues sont les fonctions dont le graphe se trace "sans lever le crayon".



Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition :

1. $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{R}$,
2. $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{R}^*$,
3. $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,
4. $f(x) = \ln x$ sur $]0, +\infty[$,
5. $f(x) = \exp x$ sur $\mathbb{R}$.
6. $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$.

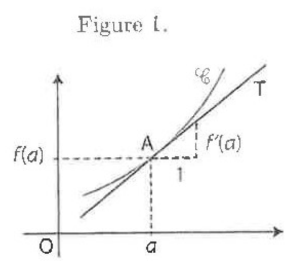
En additionnant, en multipliant et en quotientant (à condition de se situer en dehors des points qui annulent le dénominateur) des fonctions continues, on construit de nouvelles fonctions continues.

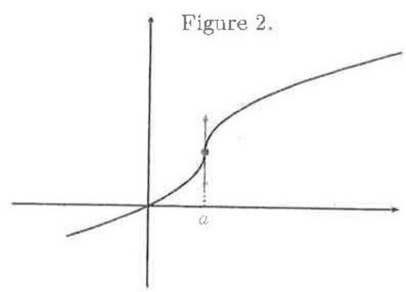
Exemple 6.2. *Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ et les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.*

6.2.2 Dérivabilité, calcul de la dérivée, tangente

Définition 6.3. *1) On dit que f est* **dérivable en un point** *a de son domaine de définition si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite lorsque x tend vers a. Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$.*
2) On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I. On parle alors de **fonction dérivée** *f' définie sur I.*
3) Soit f une fonction dérivable en $a \in D_f$.
Dans un repère, la **tangente** *à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite T qui passe par A et de coefficient directeur $f'(a)$ (voir la figure 1. ci-dessous). Une équation de T est*

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$





Remarque 6.1. Il n'est pas nécessaire que la fonction f soit dérivable en a pour que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admette une tangente au point $(a, f(a))$. Plus précisement, si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a. Néanmoins, si f est continue en a, on dit que le graphe de f admet la droite verticale d'équation $x = a$ pour tangente au point $(a, f(a))$ (voir la figure 2. ci-dessus).

Exercice 6.2. Représenter graphiquement la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$. Où est-elle continue ? Où est-elle dérivable ?

Exemple 6.3. *En utilisant la définition de la dérivée en un point, on calcule les deux limites suivantes : $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.*

Pour calculer la dérivée d'une fonction à partir de son expression, on se sert le plus souvent des formules et règles suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

Propriété 6.1. *Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.*

fonction f	$f'(x)$	*ensemble où f est dérivable*
$u+v$	$u'+v'$	I
uv	$u'v+uv'$	I
ku *(où k est une constante réelle)*	ku'	I
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$x \in I$ *tel que* $v(x) \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$x \in I$ *tel que* $v(x) \neq 0$
$u(ax+b)$	$a.u'(ax+b)$	x *tel que* $ax+b \in I$
e^u	$u'e^u$	I
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	$x \in I$ *tel que* $u(x) > 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$x \in I$ *tel que* $u(x) > 0$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u^n	$nu'u^{n-1}$	I

Propriété 6.2. *Si u est une fonction dérivable sur I, alors u est continue sur I.*
Attention la réciproque est fausse. Il suffit par exemple de penser à la fonction valeur absolue en 0.

Exercice 6.3. Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.
$f_1 : x \mapsto \frac{x^2+3x-7}{10}$, $f_2 : x \mapsto x+\sqrt{x}$, $f_3 : x \mapsto \frac{x^2+2x+2}{x^2+x}$, $f_4 : x \mapsto x^2 \cos x$, $f_5(x) = 4xe^x$, $f_6(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 6.4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes en son point d'abscisse a.
$f_1 : x \mapsto x^2-3x+1$ en $a=2$; $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}+3$ en $a=1$; $f_3 : x \mapsto \frac{2x}{x+2}$ en $a=0$.

Exercice 6.5. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :
$i(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$; $j(x) = (x-1)[2\ln(x)+5]$ sur $I =]0,+\infty[$; $k(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0,+\infty[$.

6.2.3 Signe de la dérivée et sens de variation de la fonction

Définition 6.4. *Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soit un intervalle $I \subset D$.*
1) f est croissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
f est décroissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$.
2) f est strictement croissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
f est strictement décroissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.
3) f est constante sur I ssi $\forall a, b \in I$, $f(a) = f(b)$.
4) On dit que f est monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.
On dit que f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Propriété 6.3. *Soit f une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soit un* **intervalle** *$I \subset D$.*
1) Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.
2) Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Remarque 6.2. L'hypothèse que I soit un intervalle est indispensable. En effet penser à la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$. Cette fonction admet une fonction dérivée strictement négative sur $\mathbb{R}^*$, sans pour autant être strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 6.6. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^4$. Etudier le signe de f', puis dresser le tableau de variations de f. En déduire que l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

6.2.4 Dérivée et extremum

Définition 6.5. *Soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. Soit A une partie de D_f. Soit $x_0 \in A$.*
1) On dit que x_0 est un **maximum** *de f sur A, si $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in A$.*

2) On dit que x_0 est un **minimum** *de f sur A, si $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in A$.*
3) Dans les deux cas, x_0 est un **extremum** *de f sur A.*
4) On précise que l'extremum est global si cela est vérifié sur D_f tout entier.
5) On précise que l'extremum x_0 est local si cela est vérifié sur une partie de la forme $]x_0 - r, x_0 + r[\cap D_f$ (où r est un réel $r > 0$).

Propriété 6.4. *Supposons que f soit dérivable sur I, intervalle ouvert. Les extrema de f sur I, sont des points x tels que $f'(x) = 0$.*

Remarque 6.3. La réciproque est fausse. En effet, la fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^3$, vérifie $f'(0) = 0$ et pourtant 0 n'est pas un extremum local de f.

Dans la pratique, pour trouver les extrema de f, on étudie le signe de f'. Par exemple, si $f'(x_0) = 0$, que $f'(x) < 0$ pour x proche de x_0 à sa gauche et $f'(x) > 0$ pour x proche de x_0 à sa droite, alors x_0 est un minimum local. Il est commode de tracer un tableau de variations.

Exercice 6.7. Rechercher les points extrémaux globaux éventuels des fonctions suivantes :
$f_1 : x \mapsto x^3 - x^4$; $f_2 : x \mapsto \sqrt{x+3}$; $f_3 : x \mapsto \frac{2x}{x+2}$; $f_4 : x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$.

6.3 Notions et exercices supplémentaires.

Fonctions paires, fonctions impaires, fonctions périodiques

Définition 6.6. *Soit $D \subset \mathbb{R}$, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, tel que si $x \in D$ alors $-x \in D$. On dit que D est symétrique par rapport à 0. Soit une fonction f définie sur D.*
1) f est **paire** *si et seulement si pour tout réel x de D, $f(-x) = f(x)$.*
Dans ce cas, l'axe $(0y)$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.
2) f est **impaire** *si et seulement si pour tout réel x de D, $f(-x) = -f(x)$.*
Dans ce cas, l'origine 0 est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Définition 6.7. *Soit $T \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est* **périodique de période** *T si et seulement si pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$.*
Dans ce cas, le graphe de f est invariant par la translation de vecteur $(T, 0)$ dans le plan.

Exemple 6.4. *Les fonctions sinus et cosinus vues au thème 3, sont périodiques de période 2π.*

Exercice 6.8. Pour toutes les fonctions suivantes déterminer si elles sont paires ou impaires :
$x \mapsto x^{2p}$ et $x \mapsto x^{2p+1}$, sur $\mathbb{R}$, où $p \in \mathbb{N}^*$.
$x \mapsto x^4 - 3x^2 + 2$, $x \mapsto x^3 - 3x$, sur $\mathbb{R}$. Et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
$x \mapsto \ln(x^2+1) + \exp(x^8 - 3)$, $x \mapsto f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{7+x^6}{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.9. Soient f et g les fonctions périodiques définies par $f(x) = \cos(6x)$ et $g(x) = \sin(4x)$. Déterminer des périodes de f, g et $f + g$.

Exercice 6.10. Etudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & \text{si} \quad x \neq -1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$$

Exercice 6.11. 1) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Prouvez que g n'est pas dérivable en zéro.
2) Soit h telle que $h(x) = 2 - x^2$ si $x < 1$ et $h(x) = \frac{1}{x}$ si $x \geq 1$. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas dérivable en 1.

Exercice 6.12. En utilisant la notion de dérivée, déterminer les limites suivantes :
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}, \ \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, \ \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x - 1}.$$

Exercice 6.13. Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.
$f_1 : x \mapsto \left(\frac{x}{3+2\sqrt{x}}\right)^2$, $f_2(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$,

Exercice 6.14. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à la droite d d'équation $y = -4x + 6$?

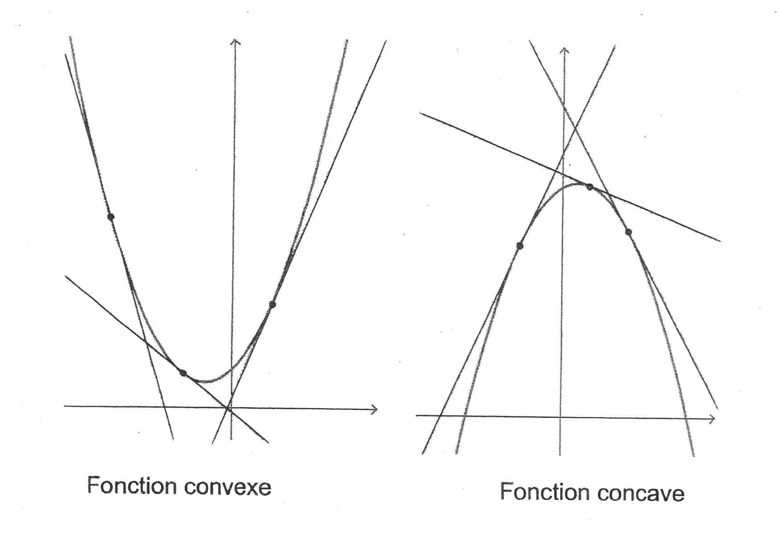
7 Thème 7 : Etude de fonctions et représentation graphique de fonctions

7.1 Convexité et point d'inflexion

Définition 7.1. *Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est elle aussi une fonction dérivable sur I. On appelle* **fonction dérivée seconde** *de f sur I la dérivée de f' et on note : $f''(x) = (f')'(x)$.*

Exercice 7.1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 7.2. *Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.*
- La fonction f est **convexe** *sur I si, sur I, sa courbe représentative est entièrement située au dessus de chacune de ses tangentes.*
- La fonction f est **concave** *sur I si, sur I, sa courbe représentative est entièrement située au dessous de chacune de ses tangentes.*

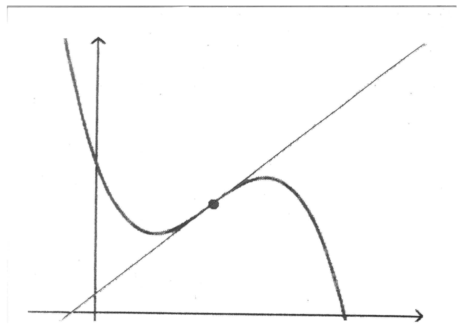


Propriété 7.1. *La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.*
La fonction cube est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$.
La fonction inverse est concave sur $]-\infty, 0[$ et convexe sur $]0, +\infty[$.
La fonction racine carrée est concave sur $]0, +\infty[$.

Propriété 7.2. *Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.*
- f est convexe ssi $f''(x) \geq 0$ sur I.
- f est concave ssi $f''(x) \leq 0$ sur I.

Exercice 7.2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$. Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Définition 7.3. *Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. Un* **point d'inflexion** *est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.*



Remarque 7.1. Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.
Par exemple étudier la fonction cube en l'origine.
Pour les fonctions deux fois dérivables, les points d'inflexion sont ceux où la dérivée seconde s'annule et change de signe.

7.2 Etude de fonctions

Dans ce chapitre, nous menons l'étude d'une fonction réelle définie sur son ensemble de définition D_f et nous traçons son graphe $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$ dans un plan $\mathbb{R}^2$, muni d'un repère.

On suit le programme suivant :
1) On précise les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f.
2) Là où c'est possible, on calcule la dérivée f' et on étudie son signe.
Ceci indique les variations de la fonction f (on reporte les résultats dans un tableau de variations).
3) On détermine les éventuels extrema de f et la valeur qu'elle y prend.
4) On calcule les limites de f aux bornes du domaine de définition, que l'on reporte dans le tableau de variations.
5) On détermine les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales.
6) On étudie la convexité de f sur D_f et l'existence éventuelle de points d'inflexion.
7) On peut aussi calculer, à la main, quelques valeurs simples prises par la fonction f.
8) Puis, on reporte le tout dans un plan muni d'un repère.

Exercice 7.3. Soit f la fonction polynomiale de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5.$$

1) Etudier f sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer ses extrema locaux.
3) Prouver que f admet un unique point d'inflexion A et déterminer le.
4) Déterminez l'équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$, courbe représentative de f, au point A.
5) Tracez $\mathcal{C}$ et Δ.

Exercice 7.4. Etudier sur $\mathbb{R}$ la fonction f définie par

$$f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}.$$

1) Etudiez les variations de f sur $\mathbb{R}$ (dressez le tableau de variations avec les limites aux bornes).
2) Montrez que f admet un maximum global en $x = 2$. Calculer la valeur de f en ce point.
3) Etudiez la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
4) Montrer que f admet un point d'inflexion en $x = 4$.
5) Déterminer les équations des tangentes Δ et d en $x = 2$ et en $x = 4$ respectivement.
6) Tracez $\mathcal{C}$, Δ et d.

7.3 Exercices supplémentaires.

Exercice 7.5. Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$
2) $f(x) = |x^2 - 1|$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 7.6. Etudiez et représentez les fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$

2) $f : x \mapsto \sqrt{x + \dfrac{1}{3x}}$

3) $f : x \mapsto x2^x$

4) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$

Exercice 7.7. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + 2\ln x$.
1) Déterminer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition.
2) Etudier le sens de variation de g.
3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet le nombre réel 1 comme unique solution sur $]0, +\infty[$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7.8. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

1) Calculez $f'(x)$ pour tout réel $x \in]-1, +\infty[$ et vérifiez que $f'(x)$ a le même signe que $2x^3 - 3x^2 - 1$.
2) On note g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
a) Etudiez les variations de g.
b) Prouvez que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]-1, +\infty[$ et que $\alpha \in [1.6; 1.7]$.
c) Déduisez-en, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
3) En utilisant les résultats précédents, dressez le tableau de variations de f.
4) Ecrivez une équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$, courbe représentative de f, au point A d'abscisse 0.
Etudiez la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite Δ sur l'intervalle $]-1, 1]$.
5) Prouvez que $\mathcal{C}$ est située au-dessus de sa tangente d au point d'abscisse 1.
6) Calculer $f''(x)$ explicitement pour tout réel $x \in]-1, +\infty[$. Prouver que $\mathcal{C}$ admet 3 points d'inflexion en 0, β et γ, où $\beta \in]0, 1[$ et $\gamma > \alpha$.
7) Tracez $\mathcal{C}$, Δ et d.

8 Thème 8 : Calcul intégral

8.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

Choisissons un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. L'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$ où K est le point de coordonnées $(1, 1)$.

Définition 8.1. *Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie, continue et positive sur $[a, b]$.*
1) Le **domaine situé sous la courbe** $\mathcal{C}_f$ *est le domaine situé entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.*
*2) L'***intégrale de** a **à** b **de la fonction** f *est l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous sa courbe $\mathcal{C}_f$. On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.*

Relation de Chasles. Pour tous a, b, c tels que $a \leq b \leq c$, $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Exercice 8.1. 1) Soit la fonction f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = \sqrt{1 - (x-1)^2}$. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[0, 2]$ puis donner la valeur de $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$ sans calcul.

2) Soit la fonction f définie sur $[1, 3]$ par $f(x) = x+1$. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[1, 3]$ puis déterminer la valeur de $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx$ comme l'aire d'un trapèze rectangle.

8.2 Notion de primitives

Théorème 8.1. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée la fonction f.*

Définition 8.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Dire que la fonction F est une* **primitive de** f **sur** I *signifie que F est dérivable sur I et que $F' = f$.*

Propriété 8.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et qui admet une primitive F sur I.*
1) L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble infini $\{F + C : C \in \mathbb{R}\}$.
2) Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

8.3 Calculs de primitives

Théorème 8.2. *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.*

fonction f	primitives de f sur I	conditions sur u
$u'u^n (n \in \mathbb{Z}^*$ et $n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	lorsque $n < -1, u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$u'v + uv'$	$uv + C$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$	$u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u'e^u$	$e^u + C$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$ sur I

Formulaire de primitives.

f	est définie sur I	les primitives de f sur I sont
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$kx + C$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$\ln x + C$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$	$\ln(-x) + C$
$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\frac{1}{x} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$

Soient $a > 0$ et b deux réels. Les primitives de $\frac{1}{ax+b}$ sont $\frac{1}{a}\ln(ax+b)+C$ sur $]\frac{-b}{a}, +\infty[$ et sont $\frac{1}{a}\ln(-ax-b)+C$ sur $]-\infty, \frac{-b}{a}[$.
Soient $a \neq 0$ et b deux réels. Les primitives de e^{ax+b} sont $\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.2. Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I vérifiant la condition indiquée.

1. $f(x) = 4x^2 - 3x + 2, I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 0$.
2. $f(x) = 3x + 1 + \frac{1}{x^2}, I =]-\infty, 0[$ et $F(-2) = 1$.
3. $f(x) = (x^2 + 1)^2, I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 0$.
4. $f(x) = e^{x+1}$ et $F(\ln 2) = 0$.

Exercice 8.3. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto 10e^x + \frac{18x-\pi}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$;
2. $f : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$;
3. $f : x \mapsto \frac{1}{(2x-1)^4}$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$;
4. $f : x \mapsto x^2e^{2x^3}$ sur $\mathbb{R}$;
5. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$;
6. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$ sur $I =]0, +\infty[$

8.4 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition 8.3. *Soit f une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle I. Pour a et b dans I, l'**intégrale de** a **à** b **de** f, notée $\int_a^b f(x)dx$ est le nombre réel $F(b) - F(a)$, noté $[F(x)]_a^b$, où F est une primitive de f sur I.*

Remarque 8.1. Dans cette définition a n'est pas nécessairement inférieur à b.
Dans le cas où $b \leq a$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
Dans cette définition, il est important que f soit continue sur $[a, b]$ fermé.
La lettre x, dite "variable muette", n'a pas d'importance en soi ; on aurait aussi pu écrire $\int_a^b f(t)dt$ ou encore $\int_a^b f(u)du$, etc.
La primitive que l'on a choisi dans la définition n'importe pas : si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors on a $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) + C - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$.
Dans le cas où f est une fonction continue positive, cette dernière définition 8.3 coïncide avec la définition 8.1, grâce au Théorème 8.1.

Intégrale et aire algébrique
Dans un repère orthogonal, $\mathcal{D}$ est le domaine situé entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, où $a \leq b$.
L'aire algébrique de $\mathcal{D}$ est la somme des portions d'aires comptées positivement lorsque $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de l'axe des abscisses et comptées négativement lorsque $\mathcal{C}_f$ est située au dessous de l'axe des abscisses. Cette aire algébrique est égale à $\int_a^b f(x)dx$.

8.5 Propriétés des intégrales pour des fonctions continues de signe quelconque

1) Si $f = 0$, alors $\int_a^b f(x)dx = 0$;
2) Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (mais la réciproque est fausse).
3) Si $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.
4) L'intégrale est linéaire : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, g sont continues sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b (f + \lambda g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt$$

5) l'intégrale vérifie la relation de Chasles : si f est continue sur I et que $a, b, c \in I$ (ne vérifiant pas nécessairement $a \leq b \leq c$), alors

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

En particulier, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Théorème 8.3. *Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Soit $\alpha \in [a, b]$. Alors la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(t)dt$, est la primitive de f sur $[a, b]$, nulle en α.*

Exercice 8.4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^{-1}(t^2 - 4t + 3)dt$;
2. $\int_0^\pi \cos t dt$;
3. $\int_1^2(t^2 + t - \frac{1}{t} + \frac{3}{\sqrt{t}})dt$;
4. $\int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$;
5. $\int_0^1 5(e^{x+9} + x^9)dx$;
6. $\int_{-1}^1 \frac{1}{2x+3}dx$,

8.6 Exercices supplémentaires.

Exercice 8.5. Déterminer une primitive sur I pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f : x \mapsto \frac{5}{x^3}$ sur $]0, +\infty[$;
3. $f(x) = 2\sqrt{2x+3}$ sur $]-\frac{3}{2}, +\infty[$;
4. $g(x) = \frac{e^{3x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$,
5. $h(x) = 3xe^{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$,
6. $i(x) = \frac{e^x}{(3e^x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$,
7. $j(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2e^x+1}}$ sur $\mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto \frac{2}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$.
9. $g : x \mapsto \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2}$ sur $]0, +\infty[$.
10. $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
11. $k : x \mapsto \frac{\ln 2 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8.6. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_4^1 \frac{e^{\sqrt{t}-1}}{2\sqrt{t}}dt$,
2. $\int_{-1}^2 |x^2 - 2x|dx$,
3. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t/2)dt$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t/2)dt$ (calculer d'abord $J + K$ et $J - K$).